Roggen

Die

ebene Trigonometrie

für

den Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Karl Koppe,
Professor.

Fünfte, verbesserte Auflage.

Mit 5 Figurentafeln.

Essen,
Druck und Verlag von G. D. Bädeker.
1871.

Vorrede zur fünften Auflage.

Aus der Vorrede zur dritten Auflage wird hier Folgendes wiederholt:

„Während in der Geometrie das synthetische, in der Arithmetik das analytische Verfahren vorwaltet, lassen sich die Lehrsätze der Trigonometrie mehrentheils auf beiden Wegen, auf dem Wege der Construction und der Rechnung, herleiten. Bietet das constructive Verfahren den Vortheil größerer Anschaulichkeit dar und wird dasselbe hierdurch für den Anfänger gewöhnlich leichter zugänglich, so gewährt auf der andern Seite die analytische Entwickelung im Wege der Rechnung den Vorzug größerer Kürze und Allgemeingiltigkeit. Trigonometrische Sätze, in deren Beweisen, wenn sie gründlich geführt werden sollen, bei dem constructiven Verfahren mehrere Fälle unterschieden und besonders erörtert werden müssen, können auf dem Wege der Rechnung durch eine einzige einfache Entwickelung in vollster Allgemeingiltigkeit dargethan werden.

Auf der anderen Seite ist jedoch nicht in Abrede zu stellen, daß die algebraischen Ausdrücke in ihrer abstracten Form dem weniger Geübten starr und unbelebt erscheinen und die algebraischen Rechnungen, welche häufig nach demselben wiederkehrenden Schema auszuführen sind, denselben eher ermüden als die constructive Behandlungsweise, welche durch ihre Anschaulichkeit, da sie nicht bloß dem Verstande, sondern auch der Einbildungskraft Beschäftigung gewährt, leichter seine Aufmerksamkeit zu fesseln und rege zu erhalten vermag. Indem die trigonometrischen Formeln auf eine im Raume anzuschauende Figur bezogen werden, gewinnen sie für den Anfänger an Deutlichkeit und werden von demselben, da sie ihm gleichsam belebter erscheinen, mit größerer Leichtigkeit und regerem Interesse erfaßt.

Bei den eigenthümlichen Vorzügen, welche hiernach der synthetischen und der analytischen Entwickelung im Wege der Construction und der Rechnung zukommen, und bei der Unterstützung, welche sich dieselben gegenseitig im Unterrichte gewähren, hat der Verfasser, wo für die Begründung der trigonometrischen Lehrsätze der eine, wie der andere Weg offen stand, nicht zwischen denselben gewählt, sondern beide seinen Lesern dargeboten. Was auf diese Art an Kürze eingebüßt worden ist, dürfte durch die angezeigten Vortheile reichlich aufgewogen sein.

Nach des Verfassers Ansicht bildet die Trigonometrie, in welcher die Lehren und die Methode der Algebra sowohl als der Geometrie zur Anwendung kommen, mit Recht den Ausgangspunkt des elementaren mathematischen Unterrichts. Die große Wichtigkeit der Trigonometrie für den Unterricht wird aber noch dadurch erhöht, daß sie dem An-

fänger das weiteste Feld zur freien und selbstständigen Uebung seiner Kräfte, eine nie zu erschöpfende Quelle eben so mannigfaltiger als den Kräften des Anfängers angemessener Aufgaben darbietet.

Die in dem dritten Abschnitte zum großen Theile sowohl auf synthetischem als auf analytischem Wege gelösten Aufgaben sollen dem Anfänger als Muster und Anleitung für die eigene Behandlung verwandter Aufgaben dienen, welche nach jenen in den Anmerkungen jedoch ohne Auflösung in nicht unbeträchtlicher Zahl angeführt sind. Nach den Erfahrungen des Verfassers lieben es die Schüler, die Auflösung der nämlichen Aufgabe auf verschiedenen, von einander unabhängigen Wegen herbeizuführen.

Die beiden letzten Abschnitte enthalten Anwendungen der ebenen Trigonometrie auf die Feldmeßkunst und einen kurzen Abriß der ebenen Polygonometrie. Bei dem großen Nutzen, welchen die Trigonometrie in praktischer Hinsicht gewährt, wird selbst im Gymnasium, für welches dieses Lehrbuch vorzugsweise bestimmt ist, auch dieser Seite eine angemessene Berücksichtigung gebühren, obschon dieselbe nicht als das Wichtigste und Hauptsächlichste hervorzuheben sein wird. Die hohe Bedeutung der Trigonometrie als Unterrichtsgegenstand gründet sich weniger auf die Unterstützung, welche dieselbe der Feldmeßkunst und den verschiedenen Zweigen der Naturwissenschaft darbietet, als vielmehr darauf, daß dieselbe für alle studirenden Jünglinge, welches auch immer die Wahl ihres künftigen Berufes sein mag, sich als eins der trefflichsten Bildungsmittel des Verstandes erweist."

Von den bei der neuen Auflage angebrachten Verbesserungen sind die erheblichsten der unter §. 16 eingeschaltete Lehrsatz über das Verhältniß zwischen Bogen, Sinus und Tangente, — die unter §. 37 aufgeführten Sätze über Maxima und Minima der Producte der Sinus und Tangenten der Theile eines Winkels, — eine einfachere und sich durch Anschaulichkeit sehr empfehlende Ableitung der in den §§. 67, 68 und 73 angegebenen Formeln über die Berechnung der Winkel und des Inhalts eines Dreiecks, dessen drei Seiten gegeben sind, — und die Hinzufügung des Anhangs zum zweiten Abschnitte (S. 66) über die Vergleichung des Umfangs und des Inhalts der Figuren.

Soest, im Januar 1871.

Der Verfasser.

Einleitung.

§. 1. Erklärung.

Während uns die elementare Geometrie die gegenseitige Abhängigkeit räumlicher Größen von einander im Allgemeinen kennen lehrt, daß z. B. durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel eines Dreiecks auch die beiden anderen Winkel und die dritte Seite des Dreiecks bestimmt werden, und uns in den Stand setzt, wenn jene gegeben sind, diese durch geometrische Construction zu finden, zeigen die Lehrsätze der Trigonometrie, wie sich aus den Maßzahlen gegebener räumlicher Größen die Maßzahlen gesuchter Größen auf dem Wege der Rechnung herleiten lassen.

Die Trigonometrie setzt hierbei eben so wohl die Lehren der elementaren Geometrie als der Arithmetik und Algebra als bekannt voraus.

Die vorstehende Angabe soll dazu dienen, dem Anfänger vorläufig die Aufgabe der Trigonometrie zu bezeichnen; die genaue Definition kann erst weiter unten in §. 7 gegeben werden.

Bemerkung.

Eine gerade Linie ist sowohl ihrer Lage als ihrer Größe nach durch ihre beiden Endpunkte gegeben; eine gradlinige Figur ist vollständig bestimmt, wenn ihre Ecken gegeben sind; dieses letztere gilt eben so von einem eckigen Körper. Wir beschäftigen uns demgemäß zunächst mit der Aufgabe, wie durch die Maßzahlen gewisser gemessener Größen (Linien oder Winkel — denn nur diese pflegen wir unmittelbar zu messen —) die Lage eines Punktes festgestellt werden kann. Ehe wir jedoch die allgemeine Aufgabe lösen, die Lage eines Punktes im Raume festzustellen, behandeln wir vorher die einfachere Aufgabe, die Lage eines Punktes in einer Ebene, welche wir als gegeben annehmen, zu bestimmen; und da selbst in einer Linie unzählige Punkte angenommen werden können, so beginnen wir mit der einfachsten Aufgabe, die Lage eines Punktes in einer Linie festzustellen.

§. 2. Erklärung.

Wenn in einer (geraden oder krummen) Linie ein fester Punkt A, Fig. 1, angenommen wird, so ist die Lage eines beliebigen anderen Punktes B bestimmt, wenn der Abstand AB des Punktes B von dem festen Punkte A gegeben und zugleich angezeigt ist, an welcher Seite von A der Punkt B, (ob er rechts oder links von A) liegt. Um dieses letztere anzuzeigen, pflegt man für alle diejenigen Punkte, welche an der einen Seite von A liegen, den Maßzahlen ihrer Abstände von dem festen Punkte A das Zeichen (+),

das Zeichen (—) aber vorzuschreiben, wenn dieselben an der entgegengesetzten Seite von A liegen. Den entstandenen positiven oder negativen Zahlen gibt man den Namen Abscissen; der feste Punkt A aber wird der Anfangspunkt der Abscissen genannt.

Nehmen wir hier in der Fig. 1 die nach rechts fallenden Abscissen als positiv, die links liegenden als negativ an, so ist die Abscisse des Punktes B = + AB, die Abscisse des Punktes C = — AC.

In diesen Ausdrücken hat man jedoch unter AB und AC nicht die Linien selbst, sondern die Maßzahlen zu verstehen, welche hervorgehen, wenn diese Linien durch eine bestimmte Einheit gemessen worden sind.

Man begreift nun leicht, daß ein Punkt in der Linie BC vollständig bestimmt ist, wenn man seine Abscisse kennt. — Von dem Anfangspunkte A sagt man, er habe die Abscisse Null.

Ferner sieht man leicht ein, daß es an sich willkürlich ist, nach welcher Seite hin die Abscissen positiv und nach welcher sie negativ gerechnet werden. — Im Folgenden sollen jedoch, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil angegeben wird, in wagerecht gezogenen Linien beständig die rechts fallenden Abscissen positiv, die nach links liegenden negativ, in senkrecht gezogenen Linien die nach oben gehenden Abscissen positiv, die nach unten fallenden negativ angenommen werden

Das Vorstehende läßt zwar die Anwendung der Vorzeichen (+) und (—) als ein einfaches und bequemes Hilfsmittel, um den Gegensatz in der Lage zweier Linien bemerklich zu machen, erkennen; daß dieselbe aber aus der Natur der Sache mit Nothwendigkeit folgt, wird sich mit voller Entschiedenheit erst weiter unten (§. 121) bei der Umwandlung der Coordinaten herausstellen.

§. 3. Erklärung.

Um die Lage eines oder mehrerer Punkte in einer Ebene zu bestimmen, pflegt man in derselben zwei sich unter rechten Winkeln durchschneidende feste Linien, Axen, anzunehmen. Die eine derselben AX, Fig. 2, nennt man die Abscissenaxe, die andere AY die Ordinatenaxe. Um nun die Lage eines Punktes (C) in der Ebene festzustellen, zieht man durch denselben zwei den Axen parallele Linien (CD und CE) und bestimmt die Abscissen der Einschnittspunkte (D und E) dieser Linien in die Axen, indem man den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt (A) der beiden Axen als Anfangspunkt annimmt. Um aber die Abscisse auf der einen Axe von der auf der andern unterscheiden zu können, gibt man der auf die Ordinatenaxe (AY) fallenden Abscisse (AE) den Namen Ordinate und behält die Benennung Abscisse nur für die auf der Abscissenaxe (AX) abzumessende Abscisse (AD) bei. Abscissen und Ordinaten faßt man unter dem gemeinschaftlichen Namen Coordinaten zusammen.

Nehmen wir, wie schon oben bemerkt, die vom Anfangspunkte A nach rechts hin abgeschnittenen Abscissen und die nach oben hin fallenden Ordinaten als positiv an, und bezeichnen wir der Kürze wegen die Abscissen mit x, die Ordinaten mit y, so ist z. B.

für den Punkt C x = + AD, y = + AE = + CD,
" " " F x = — AG, y = + AH = + FG,
" " " K x = — AL, y = — AM = — KL,
" " " N x = + AO, y = — AP = — NO,

Man sieht hiernach leicht, daß die Lage eines Punktes vollständig bestimmt ist, wenn seine beiden Coordinaten gegeben sind. Ferner wollen wir noch bemerken, daß man gewöhnlich durch den zu bestimmenden Punkt nur die der Ordinatenaxe Parallele zieht und die Ordinaten

+ AE, + AH, — AM, — AP

beziehlich durch + CD, + FG, — KL, — NO

ersetzt.

Nennen wir die vier rechten Winkel, in welche die unbegrenzte Ebene durch die beiden Coordinatenaxen getheilt wird, **Regionen** und zählen dieselben in der Ordnung, in welcher dies die Fig. 2 anzeigt, so sind

in der ersten Region die Abscissen positiv, die Ordinaten positiv,
" " zweiten " " " negativ, " " positiv,
" " dritten " " " negativ, " " negativ,
" " vierten " " " positiv, " " negativ.

Um die Lage eines Punktes im Raume festzustellen, nimmt man drei feste Ebenen an, welche auf einander senkrecht stehen und sich folglich in drei ebenfalls auf einander senkrechten Linien, **Axen**, durchschneiden, construirt durch den zu bestimmenden Punkt den festen Ebenen parallele Ebenen und mißt die durch diese Construction von den Axen abgeschnittenen Coordinaten. Wir berühren jedoch diesen Gegenstand hier nur kurz, da wir im Folgenden von demselben keine Anwendung zu machen beabsichtigen.

§. 4. Erklärung.

Um die Lage eines Punktes in einer Ebene zu bestimmen, kann man auch das folgende Verfahren anwenden. Man nimmt zunächst in der Ebene einen festen Punkt A, den **Pol**, Fig. 3, und eine von demselben ausgehende Linie AX, die **Axe**, an und bestimmt den Abstand AC des in Rede stehenden Punktes C vom Pole und den Winkel CAX, um welchen die Axe AX nach einer vorgeschriebenen Seite hin gedreht werden muß, um in die Lage AC zu gelangen. Die Linie AC wird der **Radius vector**, auch kurzweg der **Radius**, der Winkel CAX aber der **Abweichungswinkel** genannt.

Da zwei von einem Punkte ausgehende Linien eben sowohl einen hohlen als einen erhabenen Winkel einschließen, die Axe AX sowohl durch eine Drehung nach der einen als nach der anderen Seite hin in die Lage AC geführt werden kann, so muß zugleich die Richtung, in welcher wir uns diese Drehung vollzogen denken, gegeben sein, um die Wahl zwischen zwei sich zu 360° ergänzenden Werthen des Abweichungswinkels zu entscheiden. Nehmen wir an, daß diese Drehung in der Richtung erfolgen soll, welche der in der Fig. 3 beigesetzte Pfeil anzeigt, so ist der Abweichungswinkel für den Radius AC ein spitzer, für AD ein stumpfer, für AE ein flacher, für AF um den spitzen Winkel EAF größer als ein flacher und für AG um den stumpfen Winkel EAG größer als ein flacher.

Man gibt dem Radius vector und dem Abweichungswinkel zusammen den Namen **Polar-Coordinaten** und nennt zum Unterschiede hiervon Abscisse und Ordinate **rechtwinklige Coordinaten**.

Wenn im Folgenden zur Bestimmung der Lage eines Punktes zugleich rechtwinklige und Polar-Coordinaten in Anwendung kommen, so wird durchgehends vorausgesetzt, daß die Axe der letzteren mit dem positiven Schenkel der Abscissenaxe zusammenfällt und die Drehung der Axe, durch welche wir

uns den Abweichungswinkel erzeugt denken, nach der Seite hin erfolgt, an welcher die positiven Ordinaten liegen.

Da die Drehung der Axe nach zwei entgegengesetzten Seiten hin erfolgen kann, so kann man auch die an der einen Seite liegenden Abweichungswinkel als positiv, die an der entgegengesetzten Seite liegenden als negativ annehmen. Man erhält so zur Bestimmung der Lage des Radius vector zwei Werthe des Abweichungswinkels, einen positiven und einen negativen, welche jedoch, nach entgegengesetzten Seiten an die Axe angetragen, eine gleiche Lage des Radius vector ergeben. So kann man z. B. in Figur 3 den Abweichungswinkel von AG eben sowohl durch — XAG als durch + (180° + EAG) ausdrücken.

§. 5. Lehrsatz.

Sind x und y die Coordinaten irgend eines Punktes B, Fig. 4, und ist r der Radius vector dieses Punktes, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Bew. Liegt der Punkt B in der ersten Region, so ist $x = + AC$, $y = + BC$ und $r = AB$. Nach dem pithagoräischen Lehrsatze ist

$$AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

also

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Dieselbe Gleichung gilt auch dann noch, wenn der fragliche Punkt in einer der anderen Regionen liegt, in denen die Abscissen oder Ordinaten negative Werthe erhalten, da auch die Quadrate negativer Zahlen allemal positiv sind.

§. 6. Lehrsatz.

Wenn zwei Punkte B und B', Fig. 5, gleiche Abweichungswinkel haben, also auf einer durch den Anfangspunkt gehenden geraden Linie liegen, so findet zwischen den Radien, den Abscissen und Ordinaten derselben das nämliche Verhältniß statt; also wenn wir die Radien mit r und r', die Abscissen mit x und x' und die Ordinaten mit y und y' bezeichnen, so ist

$$r : r' = x : x' = y : y'.$$

Beweis. Fällt zunächst die durch den Anfangspunkt A und die fraglichen Punkte B und B' gehende Gerade in die erste Region, so ist Dreieck

$$ABC \sim AB'C',$$

und es verhält sich folglich

$$AB : AB' = AC : AC' = BC : B'C',$$

d. h.

$$r : r' = x : x' = y : y'.$$

Diese Proportionen bleiben aber auch dann noch richtig, wenn die fraglichen Punkte in einer der drei anderen Regionen liegen und daher die Coordinaten derselben theils positive theils negative Werthe erhalten, weil für beide Punkte, da sie nothwendig in die nämliche Region fallen, die Werthe der Abscissen oder Ordinaten gleichzeitig positiv und gleichzeitig negativ werden.

Erster Abschnitt.

Von den trigonometrischen Functionen.

(Analytische Trigonometrie.)

A. Von den Werthen, welche die trigonometrischen Functionen bei sich ändernder Größe des Winkels durchlaufen.

§. 7. Erklärung.

Wie wir so eben gesehen haben, sind für mehrere Punkte, welche auf der nämlichen durch den Anfangspunkt gehenden geraden Linie liegen, die Verhältnisse zwischen Radius, Abscisse und Ordinate von der Länge dieser Linien, insbesondere von der Größe des Radius ganz unabhängig; dagegen ändert sich offenbar die Größe dieser Verhältnisse, wenn der Abweichungswinkel der Linie, auf welcher jene Punkte liegen, zu- oder abnimmt. Man nennt daher die gedachten Verhältnisse die goniometrischen Functionen dieses Winkels und zwar wird insbesondere

das Verhältniß der Ordinate zum Radius der Sinus,
das Verhältniß der Abscisse zum Radius der Cosinus,
das Verhältniß der Ordinate zur Abscisse die Tangente,
das Verhältniß der Abscisse zur Ordinate die Cotangente,
das Verhältniß des Radius zur Abscisse die Secante und
das Verhältniß des Radius zur Ordinate die Cosecante

des Winkels genannt, welchen der Radius mit der Abscissenaxe bildet.

Bezeichnen wir daher den Winkel, welchen eine durch den Anfangspunkt gehende Linie mit der Abscissenaxe bildet, mit α, Fig. 4, den Radius vector für irgend einen Punkt auf dieser Linie mit r, die Abscisse mit x, die Ordinate mit y, so ist

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{x}{y}$$

$$\sec\alpha = \frac{r}{x}, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y}.$$

Die Lehre von den goniometrischen Functionen wird Trigonometrie genannt. Man sagt demgemäß auch statt goniometrische Functionen gewöhnlicher trigonometrische Functionen.

Von den oben angegebenen trigonometrischen Functionen werden wir im Folgenden vorzugsweise die vier ersten, Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente, berücksichtigen; dagegen wird von der Secante und Cosecante nur ausnahmsweise an wenigen Stellen die Rede sein, da die Secante nichts anderes als die Reciproke des Cosinus und die Cosecante gleich der Reciproke des Sinus ist, und sich daher Secante und Cosecante allemal leicht durch Cosinus und Sinus ersetzen lassen.

§. 8. Zusatz.

Zufolge der vorstehenden Erklärung werden die trigonometrischen Functionen eines Winkels α, Fig. 4, erhalten, wenn man den einen Schenkel

desselben AX als den positiven Schenkel der Abscissenaxe und den Scheitel A als Anfangspunkt der Coordinaten, ferner auf dem andern Schenkel einen beliebigen Punkt B annimmt und den Radius r und die Coordinaten x und y für diesen Punkt bestimmt. Die Verhältnisse dieser Linien sind die gesuchten trigonometrischen Functionen.

Weiter ergibt sich uns über die Beschaffenheit dieser Functionen sogleich Folgendes:

Sinus und Cosinus sind immer ächte (positive oder negative) Brüche oder höchstens gleich 1, weil die Ordinate und Abscisse immer kleiner als der Radius sind oder höchstens diesem gleich werden können. Aus gleichen Gründen sind Secante und Cosecante immer unächte Brüche. Dagegen können Tangente und Cotangente eben sowohl ächte als unächte Brüche sein, weil zwischen der Ordinate und Abscisse jedes beliebige Verhältniß stattfinden kann.

§. 9. Zusatz.

Wenn wir uns zunächst in Beziehung auf den Sinus und Cosinus mit der Untersuchung beschäftigen, wie die Größe derselben von der Größe des Winkels abhängt, mit dem wachsenden Winkel gleichzeitig zu- oder abnimmt, so werden wir uns die Vergleichung erleichtern, wenn wir für sämmtliche Winkel dem Radius vector eine gleiche Größe geben, indem dann die dem Sinus und Cosinus gleichen Verhältnisse oder Brüche alle den nämlichen Nenner erhalten. Wir beschreiben demgemäß um den Scheitelpunkt (Anfangspunkt) C, Fig. 6, mit einem beliebigen Radius einen Kreis.

Da der Bogen und der zugehörige Centriwinkel allemal gleich viel Grade enthalten, so lassen sich die Benennungen Sinus, Cosinus u. s. w. von den Winkeln auch auf die zugehörigen Bogen übertragen, wodurch wir noch an Kürze der Bezeichnung gewinnen. Wir verstehen also unter den trigonometrischen Functionen eines Kreisbogens nichts anderes als die des zugehörigen Centriwinkels. Hiernach ist z. B.

$$\sin AB = \sin ACB = \frac{BL}{BC}, \qquad \cos AB = \cos ACB = \frac{CL}{BC}$$

$$\sin AE = \sin ACE = \frac{EM}{CE}, \qquad \cos AE = \cos ACE = \frac{-CM}{CE}$$

u. dgl. m. Bekanntlich wird das Verhältniß zweier Linien gefunden, wenn man beide durch eine dritte Linie, Einheit, mißt und die erhaltenen Maßzahlen durch einander dividirt. Da es nun hierbei ganz gleichgiltig ist, welche Größe wir der Einheit geben, so werden wir am bequemsten den Radius selbst als Einheit annehmen*). Denn wenn der Nenner eines Bruches

---

*) Wenn wir z. B. den Centimeter als Einheit annehmen und der Radius BC 10 Centimeter, die Ordinate BL 8 Centimeter, die Abscisse CL 6 Centimeter mißt, so sind die Maßzahlen von BC, BL und CL beziehlich 10, 8, 6 und folglich

$$\sin AB = \frac{BL}{BC} = \frac{8}{10}, \qquad \cos AB = \frac{CL}{CB} = \frac{6}{10}.$$

Nehmen wir dagegen den Radius BC als Einheit an, so sind die Maßzahlen von BL und CL nicht mehr 8 und 6, sondern $\frac{8}{10}$ und $\frac{6}{10}$; wir können daher kürzer

$$\sin AB = BL = \frac{8}{10} \text{ und } \cos AB = CL = \frac{6}{10}$$

setzen.

$= 1$ ist, so wird der Bruch, (da 1 bekanntlich nicht dividirt), dem Zähler gleich. Indem wir daher den Radius zur Einheit annehmen, wird die Größe des Sinus durch die bloße Ordinate, die Größe des Cosinus durch die Abcisse ausgedrückt. Demgemäß ergeben sie uns zunächst für den Sinus aus Figur 6 folgende Gleichungen:

$\sin AB = +BL$
$\sin AD = +CD$, d. h. $\sin 90^0 = +1$
$\sin AE = +EM$
$\sin AF = 0$, d. h. $\sin 180^0 = 0$
$\sin AFG = -GM$
$\sin AFH = -CH$, d. h. $\sin 270^0 = -1$
$\sin AFK = -KL$,
$\sin AFA = 0$, d. h. $\sin 360^0 = 0$

Bemerken wir noch, daß wenn wir den Bogen AB bis zum Verschwinden abnehmen lassen, gleichzeitig auch der Sinus BL verschwindet, so werden wir zu den vorstehenden Gleichungen noch die folgende

$$\sin 0 = 0$$

hinzufügen und über das Verhalten des Sinus in den einzelnen Quadranten folgende Sätze aufstellen können:

Der Sinus nimmt
im ersten Quadranten zu von 0 bis + 1,
im zweiten Quadranten ab von + 1 bis 0,
im dritten Quadranten ab von 0 bis — 1,
im vierten Quadranten zu von — 1 bis 0.

Weiter erhalten wir für den Cosinus aus Fig. 6 folgende Gleichungen:

$\cos AB = +CL$
$\cos AD = 0$, d. h. $\cos 90^0 = 0$
$\cos AE = -CM$
$\cos AF = -CF$, d. h. $\cos 180^0 = -1$
$\cos AFG = -CM$
$\cos AFH = 0$, d. h. $\cos 270^0 = 0$
$\cos AFK = +CL$
$\cos AFA = +CA$, d. h. $\cos 360^0 = +1$.

Wenn wir uns den Endpunkt B des Bogens AB bis A herabgeführt denken, so daß der Bogen AB verschwindet, so geht gleichzeitig der Cosinus CL in den Radius CA = 1 über; wir fügen demgemäß zu den vorstehenden Gleichungen noch die folgende

$$\cos 0 = +1$$

hinzu und sprechen das Verhalten des Cosinus in den einzelnen Quadranten in folgenden Sätzen aus:

Der Cosinus nimmt
im ersten Quadranten ab von + 1 bis 0,
im zweiten Quadranten ab von 0 bis — 1,
im dritten Quadranten zu von — 1 bis 0,
im vierten Quadranten zu von 0 bis + 1.

Endlich heben wir noch über das Vorzeichen der Sinus und Cosinus in den einzelnen Quadranten Folgendes hervor: Die Sinus sind im ersten und zweiten Quadranten positiv, im dritten und vierten

negativ; die Cosinus sind im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten negativ.

Im Vorhergehenden haben wir nur positive Winkel oder Bogen berücksichtigt. Ziehen wir auch negative Bogen in Betracht und denken uns von dem Punkt (A, Fig. 6) aus, in welchem der positive Schenkel der Abscissenaxe den Kreis durchschneidet, irgend einen Bogen α nach entgegengesetzten Seiten (AB = AK) aufgetragen, so ist die Sehne (BK), welche die Endpunkte (B und K) dieser Bogen verbindet, auf der Abscissenaxe senkrecht und wird folglich durch dieselbe halbirt. Es haben daher diese Endpunkte (B und K) die nämliche Abcisse (+ CL) und der absoluten Größe nach gleiche, aber dem Zeichen nach entgegengesetzte Ordinaten (+ BL und — KL); dem zufolge ist

$$\sin - \alpha = - \sin \alpha \text{ und } \cos - \alpha = + \cos \alpha.$$

Wir ersuchen den Leser noch, wohl zu beachten, daß die vorstehende Schlußfolge ganz allgemein giltig, von der Größe des in der Figur verzeichneten Bogens α durchaus unabhängig ist.

§. 10. Zusatz.

Bei der Untersuchung über das Verhalten der Tangente in den verschiedenen Quadranten werden wir an Bequemlichkeit gewinnen, wenn sämmtliche Brüche, welche die Größe der zu vergleichenden Tangenten ausdrücken, gleiche Nenner erhalten. Wir gelangen hierzu, indem wir durch den Berührungspunkt A des Bogens AB, Fig. 6, die Berührungslinie NO ziehen und den durch den andern Endpunkt B gehenden Radius CB so weit verlängern, bis er die Berührungslinie in dem Punkte N durchschneidet. Dann ist $\triangle$ BCL $\backsim$ NCA, folglich, wenn wir so wie im vorhergehenden §. den Mittelpunkt C als den Anfangspunkt der Coordinaten und AC als den positiven Schenkel der Abcissenaxe annehmen,

$$\text{tang AB} = \text{tang ACB} = \frac{BL}{CL} = \frac{AN}{AC},$$

also, wenn wir den Radius AC = 1 setzen,

$$1) \quad \text{tang AB} = + \text{AN}.$$

Führen wir ferner die nämliche Construction für einen Bogen AE aus, dessen zweiter Endpunkt E in den zweiten Quadranten fällt, so ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke ECM und OCA.

$$\text{tang AE} = \text{tang ACE} = \frac{+ EM}{- CM} = - \frac{EM}{CM} = - \frac{AO}{AC},$$

folglich, wenn der Radius AC = 1 gesetzt wird,

$$2) \quad \text{tang AE} = - \text{AO}.$$

Eben so finden wir für den dritten und vierten Quadranten

$$3) \quad \text{tang AFG} = + \text{AN}$$

$$4) \quad \text{tang AFK} = - \text{AO}.$$

Aus der vorstehenden Entwicklung ergibt sich zunächst die Regel: Die trigonometrische Tangente eines Bogens wird erhalten, wenn man durch den einen Endpunkt, (welcher in den positiven Schenkel der Abscissenaxe fällt), eine Berührungslinie und durch den andern Endpunkt einen Radius zieht und diesen bis zum Einschnitte in die Berührungslinie verlängert. Das von dieser abgeschnittene Stück gibt unmittelbar die Größe der trigonometrischen Tangente des Bogens an, wenn der Radius als Einheit angenommen wird.

Weiter brauchen wir wohl kaum noch anzuführen, daß sich der Name trigonometrische Tangente darauf bezieht, daß sich zufolge der angegebenen Construction die Größe derselben bequem durch eine auf der Berührungslinie NO abgeschnittene Linie darstellen läßt, — nnd daß die Maßzahl dieser Linie positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem dieselbe von A aus an der Seite der positiven oder negativen Ordinaten (in der Figur über oder unter A) liegt.

Hiernach sind also die Tangenten im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweiten und vierten negativ.

Nehmen wir A als den festen Endpunkt eines Bogens AB an und denken uns den andern Endpunkt B den ganzen Kreis in der Richtung ABDEFGHKA durchlaufend, und erwägen wir zugleich, daß wenn der Endpunkt B mit A zusammenfällt, also der Bogen AB $= 0$ ist, auch die Tangente AN verschwindet, daß ferner, wenn der bewegliche Endpunkt B in D anlangt, der Einschnittspunkt N (des verlängerten Radius in die Berührungslinie) ins Unendliche hinausrückt, und daß, wenn der Endpunkt B sich über D hinaus nach E fortbewegt, der verlängerte Radius die Berührungslinie an der entgegengesetzten Seite in O durchschneidet u. s. w., so werden wir zufolge des Vorhergehenden über das Verhalten der Tangente in den einzelnen Quadranten leicht zu folgenden Behauptungen gelangen:

Die Tangente wächst

im ersten	Quadranten	von	0 bis $+\infty$*),
„ zweiten	„	„	$-\infty$ bis 0,
„ dritten	„	„	0 bis $+\infty$,
„ vierten	„	„	$-\infty$ bis 0.

Während bei dem Sinus und Cosinus der Uebergang vom Positiven zum Negativen und umgekehrt durch Null stattfindet, geht die Tangente bei diesem Uebergange theils durch Null theils durch Unendlich hindurch. Nach der Erklärung in §. 7 ist

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \text{ und } \cos \alpha = \frac{x}{r},$$

wo r eine unveränderliche positive Zahl vorstellt, y und x eben sowohl positiv als negativ als auch Null sein können. Sinus und Cosinus können daher nicht anders, als wenn der Zähler, folglich der Bruch selbst verschwindet, aus dem Positiven ins Negative übergehen. Nach dem angeführten §. 7 ist dagegen

$$\tang \alpha = \frac{y}{x};$$

es kann daher die Tangente auf zweierlei Weise das Vorzeichen wechseln, erstens wenn der Zähler y, also auch die Tangente selbst verschwindet, zweitens wenn der Nenner $x = 0$ und folglich die Tangente $= \infty$ wird.

Endlich bemerken wir noch über die trigonometrischen Tangenten negativer Bogen: Wenn wir vom Punkte (A) aus, in welchem der positive Schenkel der Abscissenaxe den um den Anfangspunkt der Coordinaten beschriebenen Kreis durchschneidet, irgend einen Bogen α nach entgegengesetzten Seiten (AB = AK) auftragen und die durch die zweiten Endpunkte dieser Bogen (B und K) gezogenen Radien so weit verlängern, bis sie die durch (A) gehende Berührungslinie (in den Punkten N und O) durchschneiden, so haben die entstandenen Abschnitte (AN und AO) offenbar gleiche Größe, aber entgegengesetzte Lage. Wir werden daher setzen

*) Das Zeichen ∞ bedeutet unendlich.

$$\text{tang} - \alpha = - \text{tang}\ \alpha.$$

Zu dem nämlichen Resultate können wir auch auf folgendem Wege gelangen: Wenn wir die Coordinaten des zweiten Endpunktes des Bogens $+ \alpha$ mit y und x und die des zweiten Endpunktes des Bogens $- \alpha$ mit y' und x' bezeichnen, so ist nach §. 7

$$\text{tang}\ \alpha = \frac{y}{x} \text{ und } \text{tang} - \alpha = \frac{y'}{x'}.$$

Nun ist aber, wie leicht zu sehen, und bereits in der Anmerkung zu §. 9 erörtert ist,

$$x' = x \text{ und } y' = - y,$$

folglich

$$\text{tang} - \alpha = - \text{tang}\ \alpha.$$

§. 11. Zusatz.

Für die **Cotangente** entwerfen wir folgende Construction: Durch den Punkt D, in welchem der positive Schenkel der Ordinatenaxe den Kreis durchschneidet, Fig. 6, ziehen wir die Berührungslinie ST und durch die (nicht gemeinschaftlichen) Endpunkte B, E, G, K der Bogen AB, AE, AFG und AFK Radien, welche wir bis zum Einschnitte in die Berührungslinie verlängern. Dann ist zunächst für den in den ersten Quadranten fallenden Bogen AB nach §. 7

$$\text{cotg AB} = \frac{x}{y} = \frac{+ \text{CL}}{+ \text{BL}} = + \frac{\text{CL}}{\text{BL}}.$$

Da aber, wie leicht zu sehen, $\triangle$ BCL $\backsim$ CSD ist, so ist $\frac{\text{CL}}{\text{BL}} = \frac{\text{DS}}{\text{CD}}$.

Wir können daher auch setzen $\text{cotg AB} = + \frac{\text{DS}}{\text{CD}}$

oder, wenn wir den Radius CD = 1 annehmen,

1) $\text{cotg AB} = + \text{DS}.$

Ferner ist für den in den zweiten Quadranten reichenden Bogen AE

$$\text{cotg AE} = \frac{x}{y} = \frac{- \text{CM}}{+ \text{EM}} = - \frac{\text{CM}}{\text{EM}} = - \frac{\text{DT}}{\text{CD}},$$

weil Dreieck EMC $\backsim$ CDT ist. Setzen wir wieder CD = 1, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

2) $\text{cotg AE} = - \text{DT}.$

Eben so finden wir für den dritten und vierten Quadranten

3) $\text{cotg AFG} = + \text{DS}$

4) $\text{cotg AFK} = - \text{DT}.$

Wir schließen hieraus zunächst:

Die Cotangenten sind (eben so wie die Tangente) im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweiten und vierten negativ.

Weiter folgt aber aus dem Vorhergehenden: **Die Cotangente eines Kreisbogens**, (von welchem ein Endpunkt in dem positiven Schenkel der Abscissenaxe liegt), **wird erhalten, wenn man durch den Punkt, in welchem der Kreis den positiven Schenkel der Ordinatenaxe schneidet, eine Berührungslinie und durch den zweiten Endpunkt des Bogens einen Radius zieht und diesen bis zum Einschnitte in die Berührungslinie verlängert. Das von dieser abgeschnittene Stück**, (welches zwischen dem Berührungspunkte und dem Einschnittspunkte der verlängerten Radius liegt), **gibt unmittelbar die Größe der Cotangente an**, wenn der Radius des Bogens als Einheit angenommen wird.

Denken wir uns den Endpunkt A des Bogens AB fest und den Endpunkt B den Kreis in der Richtung BDEFGHKA durchlaufend, so gelangen wir leicht weiter zu folgenden Schlüssen:

Die Cotangente nimmt ab

im ersten Quadranten von $+\infty$ bis 0,
„ zweiten „ „ 0 bis $-\infty$,
„ dritten „ „ $+\infty$ bis 0,
„ vierten „ „ 0 bis $-\infty$.

Wenn von dem nämlichen Punkte (A) zwei gleiche, aber entgegengesetzte Bogen $+\alpha$ und $-\alpha$ ausgehen und wir bezeichnen die Coordinaten des zweiten Endpunktes für den ersten Bogen mit x und y, für den andern mit x' und y', so ist

$$\cot g\, \alpha = \frac{x}{y} \text{ und } \cot g -\alpha = \frac{x'}{y'}.$$

Nun ist aber $x' = x$ und $y' = -y$, folglich

$$\frac{x'}{y'} = \frac{+x}{-y} = -\frac{x}{y},$$

d. h. $\cot g -\alpha = -\cot g\, \alpha.$

Zu demselben Resultate werden wir auch leicht durch die Figur geführt, wenn wir $+\alpha = +AB$ und $-\alpha = -AK$ machen und die oben angegebene Construction ausführen; dann erhalten wir

$$\cot g\, \alpha = +DS, \quad \cot g -\alpha = -DT,$$

also $\cot g -\alpha = -\cot g\, \alpha.$

Obschon wir, wie bereits oben bemerkt, von der Secante und Cosecante nur in seltenen Fällen Gebrauch machen werden, so wollen wir doch der Vollständigkeit wegen, das Verhalten derselben in den einzelnen Quadranten hier noch kurz entwickeln. Nach §. 7 ist, Fig. 6,

$$\sec AB = \frac{r}{x} = \frac{BC}{+CL} = +\frac{BC}{CL} = +\frac{CN}{AC},$$

oder wenn wir den Radius AC = 1 setzen,

1) $\sec AB = +CN.$

Ferner ist $$\sec AE = \frac{r}{x} = \frac{CE}{-CM} = -\frac{CE}{CM} = -\frac{CO}{AC}$$

oder, da AC = 1 ist, 2) $\sec AE = -CO.$

Eben so finden wir leicht weiter 3) $\sec AFG = -CN$

4) $\sec AFK = +CO.$

Die Secante, (welche bekanntlich gleich der Reciproke des Cosinus ist), ist daher eben so wie der Cosinus im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten negativ. Zum bequemern Festhalten im Gedächtnisse bemerken wir hierüber noch Folgendes: Bei den positiven Secanten im ersten und vierten Quadranten fällt der Endpunkt B oder K des Bogens AB oder AFK zwischen den Mittelpunkt C und die Berührungslinie NO, im zweiten und dritten Quadranten aber fällt bei den Bogen AE oder AFG, der Endpunkt E oder G auf die entgegengesetzte Seite vom Mittelpunkte C.

Weiter ergibt sich aus der vorstehenden Entwickelung leicht Folgendes:

Die Secante nimmt

im ersten Quadranten zu von $+1$ bis $+\infty$,
„ zweiten „ „ „ $-\infty$ bis -1,
„ dritten „ ab „ -1 bis $-\infty$,
„ vierten „ „ „ $+\infty$ bis $+1$.

Nach §. 7 ist zunächst für einen Bogen AB, Fig. 6, im ersten Quadranten

$$\text{cosec AB} = \frac{r}{y} = \frac{BC}{+BL} = +\frac{BC}{BL} = +\frac{CS}{CD}$$

oder, da CD = 1 ist,

$$1)\quad \text{cosec AB} = + CS;$$

ferner für einen bis in den zweiten Quadranten reichenden Bogen AE

$$\text{cosec AE} = \frac{r}{y} = \frac{CE}{+EM} = +\frac{CE}{EM} = +\frac{CT}{CD},$$

folglich, da CD = 1 ist,

$$2)\quad \text{cosec AE} = + CT.$$

Eben so findet man leicht weiter für den dritten und vierten Quadranten

$$3)\quad \text{cosec AFG} = - CS$$

$$4)\quad \text{cosec AFK} = - CT.$$

Die Consecante ist daher so wie der Sinus, (von welchem sie die Reciproke ist), im ersten und zweiten Quadranten positiv, im dritten und vierten negativ, (wo sich für das Gedächtniß das gleiche Hülfsmittel wie bei der Secante anwenden läßt).

Die Cosecante nimmt

im ersten Quadranten ab von $+\infty$ bis $+1$,
„ zweiten „ zu „ $+1$ bis $+\infty$,
„ dritten „ „ „ $-\infty$ bis -1,
„ vierten „ ab „ -1 bis $-\infty$.

Endlich führen wir noch Folgendes an: Wenn wir den Radius = 1 setzen, so ist in Fig. 6 AL = AC — CL = 1 — cos AB
und DP = CD — BL = 1 — sin AB.

Diesen Ausdrücken hat man früherhin die Namen Sinusversus und Cosinusversus beigelegt.

§. 12. Zusatz.

Wenn wir die vorstehende Entwickelung über das Verhalten der trigonometrischen Functionen in den einzelnen Quadranten nochmals überblicken, so werden wir leicht bemerken, daß dieselben sämmtlich, abgesehen vom Vorzeichen, schon im ersten Quadranten ihre größten und kleinsten Werthe erreichen, und da sie von den einen zu den andern continuirlich übergehen, auch alle zwischenliegenden Werthe durchlaufen. Es muß daher möglich sein, die trigonometrischen Functionen in den drei übrigen Quadranten durch die im ersten Quadranten zu ersetzen. Um in dieser Hinsicht zu bestimmten Resultaten zu gelangen, zeichnen wir in den um C beschriebenen Kreis, Fig. 6, das Rechteck BEGK, dessen Seiten mit der Abscissenaxe AF und der Ordinatenaxe DH parallel laufen. Setzen wir nun der Kürze wegen Bogen

$$AB = \alpha,$$

so ist Bogen

$$AE = 180^0 - \alpha,\ AFG = 180^0 + \alpha,\ AFK = 360^0 - \alpha$$

und folglich $\sin\alpha = +BL,\ \sin(180^0 - \alpha) = +EM,$

$$\sin(180^0 + \alpha) = -GM,\ \sin(360^0 - \alpha) = -KL.$$

Nun ist aber, wie leicht zu sehen,

$$BL = EM = GM = KL,$$

also $1)\quad \sin(180^0 - \alpha) = +\sin\alpha$

$$2)\quad \sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$3)\quad \sin(360^0 - \alpha) = -\sin\alpha.$$

Weiter ist in der nämlichen Figur

$$\cos\alpha = + CL,\ \cos(180^0 - \alpha) = - CM,$$
$$\cos(180^0 + \alpha) = - CM,\ \cos(360^0 - \alpha) = + CL,$$

folglich, da offenbar $CM = CL$ ist,

$$4)\quad \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$5)\quad \cos(180^0 + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$6)\quad \cos(360^0 - \alpha) = +\cos\alpha.$$

Ferner ist $\operatorname{tang}\alpha = + AN,\ \operatorname{tang}(180^0 - \alpha) = - AO,$

$$\operatorname{tang}(180^0 + \alpha) = + AN,\ \operatorname{tang}(360^0 - \alpha) = - AO;$$

da nun, wie leicht zu zeigen, $AN = AO$ ist, so folgt hieraus

$$7)\quad \operatorname{tang}(180^0 - \alpha) = -\operatorname{tang}\alpha$$
$$8)\quad \operatorname{tang}(180^0 + \alpha) = +\operatorname{tang}\alpha$$
$$9)\quad \operatorname{tang}(360^0 - \alpha) = -\operatorname{tang}\alpha.$$

Endlich ist $\operatorname{cotg}\alpha = + DS,\ \operatorname{cotg}(180^0 - \alpha) = - DT,$

$$\operatorname{cotg}(180 + \alpha) = + DS,\ \operatorname{cotg}(360^0 - \alpha) = - DT;$$

da sich leicht zeigen läßt, daß $DS = DT$ ist, so ergibt sich hieraus

$$10)\quad \operatorname{cotg}(180^0 - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$
$$11)\quad \operatorname{cotg}(180^0 + \alpha) - +\operatorname{cotg}\alpha$$
$$12)\quad \operatorname{cotg}(360^0 - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha.$$

Durch die Gleichungen (1) bis (12) werden wir in den Stand gesetzt, die trigonometrischen Functionen derjenigen Winkel oder Bogen, welche größer als 90^0 sind, durch die Functionen der Winkel oder Bogen unter 180^0 zu ersetzen. Sollen z. B. die trigonometrischen Functionen eines Winkels von 130^0 ausgedrückt werden, so setzen wir $130^0 = 180^0 - 50^0$.
Dann ist zufolge der Gleichungen 1, 4, 7 und 10

$$\sin 130^0 = + \sin 50^0,\quad \cos 130^0 = -\cos 50^0,$$
$$\operatorname{tang} 130^0 = -\operatorname{tang} 50^0,\quad \operatorname{cotg} 130^0 = -\operatorname{cotg} 50^0.$$

Ist ferner ein in den dritten Quadranten reichender Winkel oder Bogen, z. B. von 200^0 gegeben, so zerfällen wir denselben in

$$200^0 = 180^0 + 20^0$$

und erhalten zufolge der Gleichungen 2, 5, 8 und 11

$$\sin 200^0 = -\sin 20^0,\quad \cos 200^0 = -\cos 20^0,$$
$$\operatorname{tang} 200^0 = +\operatorname{tang} 20^0,\quad \operatorname{cotg} 200^0 = +\operatorname{cotg} 20^0.$$

Reicht endlich der gegebene Winkel oder Bogen bis in den vierten Quadranten, enthält derselbe z. B. 290^0, so setzen wir

$$290^0 = 360^0 - 70^0$$

und bekommen folglich vermöge der Gleichungen 3, 6, 9 und 12

$$\sin 290^0 = -\sin 70^0,\quad \cos 290^0 = +\cos 70^0,$$
$$\operatorname{tang} 290^0 = -\operatorname{tang} 70^0,\quad \operatorname{cotg} 290^0 = -\operatorname{cotg} 70^0.$$

Da der bewegliche Endpunkt eines Bogens die Peripherie wiederholt durchlaufen kann, so können auch Bogen oder Winkel, welche größer als 360^0 sind, in Betracht gezogen werden. Weil aber zwei Bogen, welche sich um die ganze Peripherie ein- oder mehrmals unterscheiden, offenbar sich decken, so müssen auch ihre trigonometrischen Functionen dieselben sein; wir werden daher, wenn wir ein Vielfaches der Peripherie durch $n\,.\,360^0$ ausdrücken, zu den obigen Gleichungen noch die folgenden hinzufügen können,

$$13)\ \sin(n \cdot 360^0 + \alpha) = \sin \alpha$$
$$14)\ \cos(n \cdot 360^0 + \alpha) = \cos \alpha$$
$$15)\ \text{tang}(n \cdot 360^0 + \alpha) = \text{tang}\ \alpha$$
$$16)\ \text{cotg}(n \cdot 360^0 + \alpha) = \text{cotg}\ \alpha.$$

Die obigen Gleichungen 1 bis 12 sind nur unter der Voraussetzung, daß α positiv und kleiner als 90^0 ist, nachgewiesen worden; dieselben gelten jedoch ganz allgemein, welchen positiven oder negativen Werth auch α haben mag. Denken wir uns nämlich zunächst in Betreff der Gleichungen 1, 4, 7 und 10 irgend einen Bogen α von dem Punkte (A) aus, in welchem der positive Schenkel der Abscissenaxe den Kreis durchschneidet, nach der einen oder andern Seite und von dem um 180^0 entfernten Punkte (F) aus, in welchem der negative Schenkel der Abscissenaxe den Kreis schneidet, den nämlichen Bogen α, aber nach der entgegengesetzten Seite aufgetragen und die Endpunkte dieser Bogen durch eine Sehne verbunden, so ist diese Sehne offenbar auf der Ordinatenaxe senkrecht und wird durch dieselbe halbirt. Es haben daher die in Rede stehenden Endpunkte dem Zeichen und der Größe nach gleiche Ordinaten und der Größe nach gleiche, dem Zeichen nach aber entgegengesetzte Abscissen, wonach mit Berücksichtigung der oben in §. 7 über die trigonometrischen Functionen gegebenen Begriffsbestimmungen die Richtigkeit der Gleichungen 1, 4, 7 und 10 in die Augen fällt. In ganz ähnlicher Art und eben so leicht können die Gleichungen 2, 5, 8, 11 und 3, 6, 9, 12 als allgemein gültig erwiesen werden. Von den Gleichungen 13 bis 16 ist die Allgemeingültigkeit schon oben im Haupttexte dargethan.

Endlich fügen wir zu den obigen Gleichungen (1) bis (16) noch die folgenden leicht abzuleitenden Gleichungen hinzu:

$$\sec(180^0 - \alpha) = -\sec \alpha, \qquad \text{cosec}(180^0 - \alpha) = +\text{cosec}\ \alpha$$
$$\sec(180^0 + \alpha) = -\sec \alpha, \qquad \text{cosec}(180^0 + \alpha) = -\text{cosec}\ \alpha$$
$$\sec(360^0 - \alpha) = +\sec \alpha, \qquad \text{cosec}(360^0 - \alpha) = -\text{cosec}\ \alpha$$
$$\sec(n \cdot 360^0 + \alpha) = +\sec \alpha, \quad \text{cosec}(n \cdot 360^0 + \alpha) = +\text{cosec}\ \alpha.$$

§. 13. Zusatz.

Von den Gleichungen des vorhergehenden §. sind uns die wichtigsten:

$$1)\ \sin(180^0 - \alpha) = +\sin \alpha$$
$$4)\ \cos(180^0 - \alpha) = -\cos \alpha$$
$$7)\ \text{tang}(180^0 - \alpha) = -\text{tang}\ \alpha$$
$$10)\ \text{cotg}(180^0 - \alpha) = -\text{cotg}\ \alpha$$

da dieselben, besonders in der eigentlichen Trigonometrie, die häufigste Anwendung finden, indem ein Dreieck eben sowohl spitze als stumpfe Winkel enthalten kann. Wir sprechen daher diese Gleichungen noch besonders in Worten aus:

Der Sinus des stumpfen Winkels ist gleich dem Sinus des spitzen Nebenwinkels; der Cosinus, die Tangente oder Cotangente des stumpfen Winkels sind dem negativen Cosinus, der negativen Tangente oder Cotangente des spitzen Nebenwinkels gleich.

Bemerkung.

Während wir in §. 12 gesehen haben, daß die trigonometrischen Functionen, abgesehen vom Vorzeichen, schon im ersten Quadranten alle Werthe durchlaufen, deren dieselben überhaupt fähig sind, zeigt uns der folgende §., daß in der zweiten Hälfte des Quadranten sich die Sinus oder Cosinus durch Cosinus oder Sinus, welche in die erste Hälfte des Quadranten fallen, ersetzen lassen, und daß die gleiche Beziehung zwischen Tangente und Cotangente stattfindet.

§. 14. Lehrsatz.

Wenn zwei Winkel oder Bogen sich zu 90^0 ergänzen, so ist der Sinus des einen gleich dem Cosinus des andern und die Tangente des einen gleich der Cotangente des andern. — Ist z. B. der eine dieser Winkel $= \alpha$, der andere also $= 90^0 - \alpha$, so ist

1) $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$ 2) $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$

3) $\text{tang}(90^0 - \alpha) = \text{cotg}\,\alpha$ 4) $\text{cotg}(90^0 - \alpha) = \text{tang}\,\alpha$.

Beweis. Ist Bogen $AB = \alpha$, $AD = 90^0$, so ist $BD = 90^0 - \alpha$, Fig. 6. Nehmen wir nun für den Bogen $AB = \alpha$ AC als den positiven Schenkel der Abscissenaxe und CD als den positiven Schenkel der Ordinatenaxe an, dagegen für den Bogen $BD = 90^0 - \alpha$ CD als den positiven Schenkel der Abscissenaxe und AC als den positiven Schenkel der Ordinatenaxe an, so ist, wenn wir den Radius = 1 setzen,

1) $\sin(90^0 - \alpha) = BP = CL = \cos\alpha$

2) $\cos(90^0 - \alpha) = CP = BL = \sin\alpha$

3) $\text{tang}(90^0 - \alpha) = DS = \text{cotg}\,\alpha$

4) $\text{cotg}(90^0 - \alpha) = AN = \text{tang}\,\alpha$.

Anm. Eben so ist

5) $\sec(90^0 - \alpha) = CS = \text{cosec}\,\alpha$

und 6) $\text{cosec}(90^0 - \alpha) = CN = \sec\alpha$.

Eigentlich sind die Gleichungen (2), (4), (6), schon in (1), (3), (5) enthalten. Wir haben jedoch um größerer Deutlichkeit willen und bei der großen Wichtigkeit dieser Gleichungen dieselben für den am häufigsten Anwendung findenden Fall, daß α positiv und $< 90^0$ ist, noch besonders erwiesen. Die Gleichungen (1) bis (6) gelten übrigens nicht bloß unter dieser beschränkenden Voraussetzung, sondern ganz allgemein, welches auch immer der Werth von α sein mag. Denn wenn wir, so wie es oben im Haupttexte geschehen, AC und CD, Fig. 6, einmal als die positiven Schenkel der Abscissen- und Ordinatenaxe, das anderemal als die positiven Schenkel der Ordinaten- und Abscissenaxe annehmen, dann auf dem Kreise irgend einen Punkt B (E, G oder K) wählen, so sind offenbar die Abscisse und Ordinate dieses Punktes für das eine Axenpaar gleich der Ordinate und Abscisse dieses Punktes für das andere Axenpaar, also wenn wir die Coordinaten des Punktes B (E, G oder K) für das erste Axenpaar mit x und y, für das andere Axenpaar mit x′ und y′ bezeichnen,

$$x' = y \text{ und } y' = x.$$

Weiter wird man sich auch noch leicht überzeugen, daß wenn wir die Maßzahl des zwischen A und B (E, G oder K) fallenden Bogens für den Anfangspunkt A mit α bezeichnen, die Maßzahl des zwischen D und B (E, G oder K) fallenden Bogens für den Anfangspunkt D, in welchem der vier Quadranten auch immer der Punkt B (E, G oder K) liegen mag, allemal durch $90^0 - \alpha$ ausgedrückt wird. Demnach ist

$$\sin(90^0 - \alpha) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos\alpha$$

$$\text{tang}(90^0 - \alpha) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{y} = \text{cotg}\,\alpha$$

$$\sec(90^0 - \alpha) = \frac{r}{x'} = \frac{r}{y} = \text{cosec}\,\alpha.$$

§. 15. Zusatz.

Wenn zwei Winkel oder Bogen sich zu 90^0 ergänzen, so pflegt man den einen das Complement des andern zu nennen. Die Gleichungen des

vorhergehenden §. lassen sich daher auch in Worten also aussprechen: **Der Cosinus und die Cotangente eines Winkels oder Bogens ist gleich dem Sinus und der Tangente des Complementes.**

Die Benennungen Cosinus und Cotangente sind Abkürzungen der vollständigeren Ausdrücke complementi sinus und tangens.

*§. 16. Lehrsatz.

Zu den obigen Gleichungen fügen wir noch die folgenden minder wichtigen Gleichungen:

$$\sin(90^0 + \alpha) = +\cos\alpha, \quad \cos(90^0 + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\text{tang}(90^0 + \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha, \quad \text{cotg}(90^0 + \alpha) = -\text{tang}\,\alpha.$$

Denn nach §. 13 ist der Sinus des stumpfen Winkels gleich dem Sinus, der Cosinus, die Tangente oder Cotangente des stumpfen Winkels aber gleich dem negativen Cosinus, der negativen Tangente oder Cotangente des spitzen Nebenwinkels. Nun ist der Nebenwinkel von $90^0 + \alpha$ offenbar $90^0 - \alpha$, folglich

$$\sin(90^0 + \alpha) = +\sin(90^0 - \alpha) = +\cos\alpha$$
$$\cos(90^0 + \alpha) = -\cos(90^0 - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\text{tang}(90^0 + \alpha) = -\text{tang}(90^0 - \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$$
$$\text{cotg}(90^0 + \alpha) = -\text{cotg}(90^0 - \alpha) = -\text{tang}\,\alpha.$$

Die so eben unter der Voraussetzung, daß α positiv und $< 90^0$ ist, erwiesenen Gleichungen gelten jedoch auch ganz allgemein, was immer α bezeichnen mag, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man in den in der Anm. zu §. 14, a. ganz allgemein erwiesenen Gleichungen $-\alpha$ statt α, also $+\alpha$ statt $-\alpha$ schreibt. Man erhält so z. B. $\sin(90^0 + \alpha) = \sin(90^0 - (-\alpha)) = \cos(-\alpha) = +\cos\alpha$ u. s. w.

*§. 17. Lehrsatz.

Ueber das Verhältniß, welches zwischen der Größe des Sinus, der Tangente und des Bogens innerhalb des ersten Quadranten stattfindet, heben wir folgende Sätze hervor:

1) **Der Sinus ist allemal kleiner, die Tangente größer als der Bogen.**

2) **Der Sinus wächst in schwächerem, die Tangente in stärkerem Verhältnisse als der Bogen.**

3) **Das Verhältniß kleiner Bogen zu den zugehörigen Sinus oder Tangenten ist nur um ein Geringes von der Einheit verschieden.**

Beweis 1. Der gegebene Bogen sei AB, Fig. 11, der Sinus BD, die Tangente AE; so ist zu zeigen, daß $BD < AB < AE$ ist. Verlängern wir die Linie BD, bis sie den Kreis zum zweitenmale in F schneidet, und ziehen wir durch B und F Tangenten, welche den verlängerten Radius AC, wie leicht zu sehen, in dem nämlichen Punkte G schneiden, so ist $BD = DF$ und $AE = BG = FG$. Da nun die gerade Linie $BF <$ der Bogen BF ist, so ist auch der Sinus $BD <$ der Bogen AB, und da nach einem bekannten Satze der Planimetrie (§. 68) $BG + FG >$ der Bogen BF ist, so ist folglich auch die Tangente $AE >$ der Bogen AB.

2. Wenn wir irgend einen Bogen AB wiederholt $= BH = HK$ u. s. w. auftragen, zu den Bogen AB, AH, AK ... die zugehörigen Sinus BD, HL, KM ... construiren, ferner die Sehnen AB, BH und HK und die Linien BN und HO $\parallel$ AC ziehen, so ist Peripheriewinkel $ABH < 180^0$, daher W. $ABD + HBN < 90^0$, und da W. $ABD + BAD = 90^0$ ist, so ist folglich

W. BAD > HBN. Denken wir uns um AB und BH als Durchmesser Kreise beschrieben, welche durch die Punkte D und N gehen, da W. ADB und BNH rechte sind, so ist BD die zum größern Peripheriew. BAD und HN die zum kleinern Peripheriew. HBN gehörige Sehne, folglich BD > HN. Eben so wird HN > KO erwiesen. Es wächst daher, wenn wir den Bogen um gleiche Stücke zunehmen lassen, der Sinus nicht um gleiche, sondern um immer kleinere Stücke.

Wenn wir die Radien CB, CH, CK ... verlängern, bis sie durch A gezogene Tangente in E, P, R ... durchschneiden, so sind AE, AP, AR ... die zu den Bogen AB, AH, AK ... gehörigen trigonometrischen Tangenten. Da W. ACE = ECP = PCR ist, so verhält sich nach einem bekannten Satze der Planimetrie (§. 186)

$$AE : EP = AC : CP$$

und

$$EP : PR = CE : CR.$$

Da nun CP > AC und CR > CE ist, so ist folglich PR > EP > AE. Es nimmt daher die Tangente in immer stärkerem Verhältnisse zu, wenn der Bogen um gleiche Stücke wächst.

3. Wenn wir der Kürze wegen den Sinus BD mit s, die Tangente AE mit t, den Cosinus CD mit c und die Maßzahl des durch den Radius AC als Einheit gemessenen Bogens AB mit b bezeichnen, so verhält sich zunächst in den ähnlichen Dreiecken BDC und EAC $\quad s : t = c : 1.$

Da nun in dem Dreiecke BDC $\quad c > 1 - s \quad$ ist, so ist folglich der Bruch

$$\frac{s}{t} > 1 - s, \text{ daher } 1 - \frac{s}{t} < s,$$

also um so mehr, da nach Nr. 1 $s < b$ ist,

$$1 - \frac{s}{t} < b.$$

Der Bruch $\frac{s}{t}$ unterscheidet sich demnach von der Einheit, wenn der Bogen in dem Radius mmal (tausend- oder millionmal) enthalten ist, um weniger als $\frac{1}{m}$ (ein Tausendtel oder Milliontel). Dasselbe muß um so mehr von den Brüchen $\frac{s}{b}$ und $\frac{b}{t}$ gelten, da diese zwischen dem Bruche $\frac{s}{t}$ und der Einheit liegen.

Es lassen sich daher sehr kleine Bogen ohne erheblichen Fehler mit ihren Sinus und Tangenten verwechseln*).

B. Von den Beziehungen, welche zwischen den verschiedenen trigonometrischen Functionen des nämlichen Winkels oder Bogens stattfinden.

§. 18. Lehrsatz.

Bezeichnet α einen beliebigen Winkel oder Bogen, so ist

$$1) \quad \cot g\, \alpha = \frac{1}{\tan g\, \alpha}$$

*) Ohnerachtet der häufigen Anwendungen, welche dieser Satz findet, pflegt derselbe doch in einem großen Theil der trigonometrischen Lehrbücher zu fehlen, in andern nicht auf elementarem Wege, sondern mit Zuziehung unendlicher Reihen erwiesen zu werden.

$$2)\qquad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$3)\qquad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Beweis. Die Richtigkeit dieser Gleichungen ergibt sich unmittelbar aus den in §. 7 (mit Beziehung auf Fig. 4) aufgeführten Gleichungen:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos \alpha = \frac{x}{r},$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{x}{y},$$

$$\sec \alpha = \frac{r}{x}, \qquad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{y},$$

vermöge deren die Cotangente die Reciproke der Tangente,
" Secante " " des Cosinus
und " Cosecante " " " Sinus ist.

Bemerkung.

Da sich zufolge der Gleichungen des vorherg. §. Secans und Cosecans in so einfacher Weise durch den Cosinus und Sinus ausdrücken lassen, so werden wir dieselben im Folgenden nur an wenigen Stellen noch besonders hervorheben. Eben so pflegen dieselben in den trigonometrischen Tafeln zu fehlen. Wiewohl nun die Cotangente in ganz gleicher Weise durch die Tangente ersetzt werden kann, läßt sich dieselbe doch nicht füglich übergehen, da jede Cotangente zugleich eine Tangente, nämlich nach §. 14 gleich complementi tangens ist.

***§. 19. Lehrsatz.**

Wenn der Sinus und Cosinus eines Winkels oder Bogens als gegeben angenommen werden, so lassen sich die Tangente und Cotangente durch folgende Gleichungen ausdrücken:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ und } \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Beweis. Nach §. 7 ist

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{y}{x} \text{ und } \operatorname{cotg} \alpha = \frac{x}{y},$$

ferner
$$\sin \alpha = \frac{y}{r},$$

und
$$\cos \alpha = \frac{x}{r}.$$

Dividiren wir die beiden letzten Gleichungen in einander, so erhalten wir, (da Brüche mit gleichem Nenner durch einander dividirt werden, wenn man ihre Zähler dividirt),

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x} = \operatorname{tang} \alpha$$

und
$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x}{y} = \operatorname{cotg} \alpha.$$

§. 20. Lehrsatz.

Zwischen dem Sinus und Cosinus eines beliebigen Winkels oder Bogens α findet folgende Gleichung statt:

$$\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1.$$

Beweis. In §. 5 haben wir gesehen, daß, welche Größe auch der Winkel oder Bogen α haben mag, doch für den Radius r, die Abscisse x und die Ordinate y die Gleichung des pythagoräischen Lehrsatzes

$$y^2 + x^2 = r^2$$

ihre Giltigkeit behält. Dividiren wir diese Gleichung durch r^2, so verwandelt sich dieselbe in:

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = 1.$$

Nun ist aber nach §. 7

$$\frac{y}{r} = \sin\alpha, \text{ also } \frac{y^2}{r^2} = \sin\alpha^{2*})$$

und

$$\frac{x}{r} = \cos\alpha, \text{ also } \frac{x^2}{r^2} = \cos\alpha^2.$$

Setzen wir diese Werthe in die vorhergehende Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1.$

*§. 21. Zusatz.

Durch die so eben erwiesene Gleichung werden wir in den Stand gesetzt, wenn der Sinus eines Winkels gegeben ist, den Cosinus zu berechnen und umgekehrt; es folgt nämlich aus derselben

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin\alpha^2},\ \sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos\alpha^2},$$

wo sich das doppelte Vorzeichen ($\pm$) vor der Wurzel darauf bezieht, daß in den verschiedenen Quadranten die Sinus und Cosinus sowohl positive als negative Werthe erhalten können.

*§. 22. Lehrsatz.

$$1 + \tan\alpha^2 = \sec\alpha^2,\ 1 + \cot\alpha^2 = \operatorname{cosec}\alpha^2.$$

Beweis. Denn wenn wir die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

einmal durch x^2 und zweitens durch y^2 dividiren, so erhalten wir

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \text{ und } \frac{x^2}{y^2} + 1 = \frac{r^2}{y^2}.$$

Nun ist aber nach §. 7

$$\frac{y}{x} = \tan\alpha,\ \frac{r}{x} = \sec\alpha,\ \frac{x}{y} = \cot\alpha,\ \frac{r}{y} = \operatorname{cosec}\alpha.$$

Hiernach verwandeln sich die obigen Gleichungen in:

$$1 + \tan\alpha^2 = \sec\alpha^2 \text{ und } 1 + \cot\alpha^2 = \operatorname{cosec}\alpha^2.$$

Um das Behalten dieser Gleichungen im Gedächtnisse durch Veranschaulichung noch zu erleichtern, kann Fig. 6 dienen. Wird nämlich der Radius = 1 gesetzt, so ist im rechtwinkligen Dreiecke CAN, wenn wir Winkel ACB = α setzen,

$$AC = 1,\ AN = \tan\alpha,\ CN = \sec\alpha$$

und nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$AC^2 + AN^2 = CN^2, \text{ also } 1 + \tan\alpha^2 = \sec\alpha^2.$$

---

*) $\sin\alpha^2$ ist der abgekürzte Ausdruck für $(\sin\alpha)^2$ und steht also für $\sin\alpha \cdot \sin\alpha$.

Ferner ist in dem rechtwinkligen Dreieck CDS

$$CD = 1,\ DS = \text{cotg}\ \alpha,\ CS = \text{cosec}\ \alpha,$$

$$CD^2 + DS^2 = CS^2,\ \text{also}\ 1 + \text{cotg}\ \alpha^2 = \text{cosec}\ \alpha^2.$$

*§. 23. Zusatz.

Wenn wir in den Gleichungen des §. 22

$$1 + \text{tang}\ \alpha^2 = \sec\ \alpha^2 \text{ und } 1 + \text{cotg}\ \alpha^2 = \text{cosec}\ \alpha^2$$

$$\sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha} \quad \text{und} \quad \text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\sin\ \alpha}$$

setzen, so verwandeln sich dieselben in

$$1 + \text{tang}\ \alpha^2 = \frac{1}{\cos\ \alpha^2} \text{ und } 1 + \text{cotg}\ \alpha^2 = \frac{1}{\sin\ \alpha^2}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt weiter

$$(1 + \text{tang}\ \alpha^2) \cos\ \alpha^2 = 1 \text{ und } (1 + \text{cotg}\ \alpha^2) \sin\ \alpha^2 = 1$$

oder $$\cos\ \alpha^2 = \frac{1}{1 + \text{tang}\ \alpha^2} \text{ und } \sin\ \alpha^2 = \frac{1}{1 + \text{cotg}\ \alpha^2},$$

also $$\cos\ \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{tang}\ \alpha^2)}} \text{ und } \sin\ \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{cotg}\ \alpha^2)}}.$$

Diese Gleichungen lehren den Cosinus finden, wenn die Tangente, und den Sinus, wenn die Cotangente gegeben ist.

*§. 24. Zusatz.

Durch die in den §§. 18 bis 23 enthaltenen Entwickelungen werden wir in den Stand gesetzt, wenn von den vier trigonometrischen Functionen eines Winkels, Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente, eine gegeben ist, die drei übrigen mit Leichtigkeit auszudrücken, wie die folgende Zusammenstellung zeigt.

Gegeben.	Gesucht.	
1) $\sin\ \alpha$	$\cos\ \alpha = \pm\sqrt{1 - \sin\ \alpha^2}$	(§. 21)
	$\text{tang}\ \alpha = \frac{\pm \sin\ \alpha}{\sqrt{(1 - \sin\ \alpha^2)}}$	(§. 18 und 21)
	$\text{cotg}\ \alpha = \frac{\pm \sqrt{(1 - \sin\ \alpha^2)}}{\sin\ \alpha}$	(§. 18 und 21)
2) $\cos\ \alpha$	$\sin\ \alpha = \pm\sqrt{1 - \cos\ \alpha^2}$	(§. 21)
	$\text{tang}\ \alpha = \frac{\pm\sqrt{(1 - \cos\ \alpha^2)}}{\cos\ \alpha}$	(§. 18 und 21)
	$\text{cotg}\ \alpha = \frac{\pm \cos\ \alpha}{\sqrt{(1 - \cos\ \alpha^2)}}$	(§. 18 und 21)
3) $\text{tang}\ \alpha$	$\sin\ \alpha = \frac{\pm\ \text{tang}\ \alpha}{\sqrt{(1 + \text{tang}\ \alpha^2)}}$	(§. 18 und 23)
	$\cos\ \alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{(1 + \text{tang}\ \alpha^2)}}$	(§. 23)
	$\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tang}\ \alpha}$	(§. 17)

$$4)\ \operatorname{cotg}\alpha \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{(1+\operatorname{cotg}\alpha^2)}} & (\S.\ 23) \\ \cos\alpha = \dfrac{\pm \operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{(1+\operatorname{cotg}\alpha^2)}} & (\S.\ 18 \text{ und } 23) \\ \operatorname{tang}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} & (\S.\ 17) \end{cases}$$

§. 25. Zusatz.

Der bequemeren Uebersicht wegen stellen wir hier die wichtigsten der in diesem Capitel entwickelten Gleichungen, welche im Folgenden am häufigsten Anwendung finden, noch besonders zusammen.

I. $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$ (§. 20).

II. $\operatorname{tang}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (§. 18).

III. $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (§. 18).

IV. $\operatorname{tang}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\alpha = 1$ (§. 17).

C. Von den trigonometrischen Functionen solcher Winkel, welche der Summe oder Differenz zweier gegebenen Winkel gleich sind.

§. 26. Aufgabe.

Aus den Sinus und Cosinus zweier spitzen Winkel α und β den Sinus und Cosinus ihrer Summe zu berechnen, vorausgesetzt, daß die Summe $\alpha + \beta < 90^0$ ist.

Auflösung.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

und

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Beweis. Es sei in Fig. 7

W. BCD $= \alpha$, ACB $= \beta$, also ACD $= \alpha + \beta$.

Mit einem Radius, welchen wir um größerer Bequemlichkeit willen als der Längeneinheit gleich annehmen wollen, beschreiben wir um den gemeinschaftlichen Scheitelpunkt C der gedachten Winkel einen Kreis, welcher die Schenkel derselben in den Punkten A, B und D durchschneidet, und ziehen aus den Punkten A und B auf CD und CB die Senkrechten AE, AF und BG. Dann erhalten wir

1) $\sin\alpha = BG$, $\cos\alpha = CG$,

2) $\sin\beta = AF$, $\cos\beta = CF$.

Um mit Hilfe dieser Linien

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin ACD = AE$$

und

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos ACD = CE$$

zu berechnen, ziehen wir noch durch den Punkt F auf CD und AE die Senkrechten FH und FK. Nun ist zunächst

3) $\sin(\alpha + \beta) = AE = AK + FH.$

Wir werden also den Sinus von $\alpha + \beta$ erhalten, wenn wir im Stande sind, FH und AK zu berechnen. Wie leicht zu sehen, ist $\triangle$ CFH $\sim$ CBG; folglich verhält sich FH : BG = CF : BC.

Nach der Annahme ist BC = 1, ferner vermöge der Gleichungen (1) und (2)

$$BG = \sin\alpha \text{ und } CF = \cos\beta;$$

setzen wir diese Werthe in die vorstehende Proportion ein, so verwandelt sich dieselbe in $FH : \sin\alpha = \cos\beta : 1$,

woraus sich, da in jeder Proportion das Product der äußeren Glieder gleich dem Producte der inneren ist,

$$4)\quad FH = \sin\alpha \cos\beta$$

ergibt. Weiter ist auch $\triangle\, AKF \sim BGC$; denn es ist W. $K = G = 90^0$, ferner W. $AFK + KFC = 90^0$ und $KFC + CFH = 90^0$, folglich $AFK = CFH = CBG$, also auch W. $FAK = BCG = \alpha$. Demnach verhält sich

$$AK : CG = AF : BC,$$

oder da $BC = 1$, $CG = \cos\alpha$, $AF = \sin\beta$ ist,

$$AK : \cos\alpha = \sin\beta : 1;$$

also

$$5)\quad AK = \cos\alpha \sin\beta.$$

Setzen wir die in (4) und (5) erhaltenen Werthe von FH und AK in die Gleichung (3) ein, so ergibt sich

$$6)\quad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.$$

Um ferner

$$7)\quad \cos(\alpha + \beta) = CE = CH - KF$$

zu finden, suchen wir CH und KF zu berechnen. In den ähnlichen Dreiecken CFH und CBG verhält sich

$$CH : CG = CF : CB,$$

oder da $CG = \cos\alpha$, $CF = \cos\beta$ und $CB = 1$ ist,

$$CH : \cos\alpha = \cos\beta : 1.$$

Hieraus ergibt sich

$$8)\quad CH = \cos\alpha \cos\beta.$$

Weiter verhält sich in den ähnlichen Dreiecken FAK und BCG

$$FK : BG = AF : BC.$$

Nun ist aber $BG = \sin\alpha$, $AF = \sin\beta$ und $BC = 1$, also

$$FK : \sin\alpha = \sin\beta : 1,$$

und folglich

$$9)\quad FK = \sin\alpha \sin\beta.$$

Verbinden wir die Gleichungen (8) und (9) mit (7), so ergibt sich

$$10)\quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

§. 27. Zusatz.

Die beiden Gleichungen des vorhergehenden §. sind auch dann noch richtig, wenn die Summe der beiden spitzen Winkel α und β = oder $> 90^0$ ist.

Beweis. Wenn zunächst $\alpha + \beta = 90^0$ ist, so ist

$$\sin(\alpha + \beta) = 1 \text{ und } \cos(\alpha + \beta) = 0,$$

ferner nach §. 14 $\sin\beta = \cos\alpha$ und $\cos\beta = \sin\alpha$, folglich

$\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta = \sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$ (§. 20) $= \sin(\alpha + \beta)$ und

$\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta = \cos\alpha \sin\alpha - \sin\alpha \cos\alpha = 0 = \cos(\alpha + \beta)$.

Um ferner zu zeigen, daß die Gleichungen des vorhergehenden §. auch dann noch giltig bleiben, wenn $\alpha + \beta > 90^0$ ist, setzen wir

$$\alpha = 90^0 - \gamma \text{ und } \beta = 90^0 - \delta,$$

also

$$\alpha + \beta = 180^0 - (\gamma + \delta).$$

Dann ist nach §. 14

$$1)\quad \sin\alpha = \cos\gamma,\ \cos\alpha = \sin\gamma,$$

$$2)\quad \sin\beta = \cos\delta,\ \cos\beta = \sin\delta,$$

ferner nach §. 13

$$3)\quad \sin(\alpha + \beta) = \sin(180^0 - (\gamma + \delta)) = \sin(\gamma + \delta).$$

Nun ist aber, da $\gamma + \delta$ offenbar $< 90^0$ ist, nach dem vorhergehenden §.

$$4)\quad \sin(\gamma + \delta) = \sin\gamma\cos\delta + \cos\gamma\sin\delta,$$

folglich vermöge der Gleichungen (1), (2) und (3)

$$5)\quad \sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Ferner ist nach §. 13

$$6)\quad \cos(\alpha + \beta) = \cos(180^0 - (\gamma + \delta)) = -\cos(\gamma + \delta).$$

Nach dem vorhergehenden §. ist

$$\cos(\gamma + \delta) = \cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta,$$

also

$$7)\quad -\cos(\gamma + \delta) = \sin\gamma\sin\delta - \cos\gamma\cos\delta$$

und folglich vermöge (1), (2) und (6)

$$8)\quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Wir haben uns in den beiden vorstehenden §§. darauf beschränkt, die beiden wichtigen Gleichungen

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

und

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

für den Fall zu erweisen, daß α und β spitze Winkel sind, weil wir diese Gleichungen in dem nächstfolgenden Abschnitte (Auflösung der ebenen Dreiecke), wenigstens im Haupttexte nur unter dieser beschränkenden Voraussetzung anwenden werden. Jene Gleichungen gelten jedoch ganz allgemein, welche Werthe auch immer die Winkel α und β haben mögen. Wir bemerken zunächst, daß diese Gleichungen richtig bleiben, wenn wir einen der gegebenen Winkel, z. B. $\beta = 0$ setzen. Denn da

$$\sin 0 = 0 \text{ und } \cos 0 = 1$$

ist, so gehen für diese Annahme, wie leicht zu sehen, jene Gleichungen in die identischen Gleichungen

$$\sin\alpha = \sin\alpha \text{ und } \cos\alpha = \cos\alpha$$

über. — Wir wollen nun weiter zeigen, daß die beiden obigen Gleichungen richtig bleiben, wenn einer der beiden gegebenen Winkel z. B. $\beta < 90^0$, aber der andere $\alpha \geqq 90^0$ ist, Wir nehmen zuerst an, daß $\alpha < 180^0$ ist, und setzen

$$\alpha = 90^0 + \gamma,$$

wo also γ irgend einen Winkel, welcher $< 90^0$ ist, bezeichnet. Dann ist nach §. 16

$$\sin\alpha = \cos\gamma \text{ und } \cos\alpha = -\sin\gamma,$$

ferner

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(90^0 + \gamma + \beta) = \cos(\gamma + \beta).$$

Da γ und β als spitz vorausgesetzt sind, so können wir zufolge des im Haupttexte geführten Beweises auch setzen:

$$\cos(\gamma + \beta) = \cos\gamma\cos\beta - \sin\gamma\sin\beta,$$

d. h.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Eben so finden wir

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(90^0 + \gamma + \beta) = -\sin(\gamma + \beta)$$
$$= -\sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\beta$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Es sei ferner $\alpha \geqq 180^0$, aber $< 270^0$; setzen wir dann $\alpha = 90^0 + \gamma$, wo also $\gamma < 180^0$ ist, so können wir vermöge des eben geführten Beweises und ganz durch die nämliche Entwickelung die Richtigkeit der zu erweisenden Gleichungen darthun. Auf diesem Wege fortfahrend überzeugen wir uns, daß die obigen Gleichungen richtig bleiben, welchen Werth auch immer α haben mag. Nachdem wir dieses gezeigt haben, verfahren wir

jetzt ganz eben so in Hinsicht des Winkels β, indem wir zunächst $\beta < 180^0$, hierauf $\beta < 270^0$ u. s. w. annehmen und dann dieselben Entwickelungen wie oben vornehmen, wobei wegen des schon geführten Beweises α jeden beliebigen Werth repräsentiren kann. Es bleiben daher die obigen Gleichungen immer richtig, wie groß wir auch α und β annehmen.

Wir haben uns bisher in Hinsicht dieser Winkel auf positive Werthe beschränkt; die obigen Gleichungen bleiben aber auch dann noch richtig, wenn α und β negative Werthe erhalten. Um dies zu zeigen, nehmen wir zunächst α als positiv und nur β als negativ an, bezeichnen mit x irgend ein Vielfaches der Peripherie, welches größer ist als der absolute Werth von β, so daß also $x + \beta$ positiv ist; dann ist nach §. 12 (Gleichung 13 und 14) und zufolge des für positive Winkel bereits Erwiesenen

$$\sin(x + \beta) = \sin\beta,\ \cos(x + \beta) = \cos\beta,$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(x + \alpha + \beta) = \sin(\alpha + (x + \beta)) \\ &= \sin\alpha\cos(x + \beta) + \cos\alpha\sin(x + \beta) \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(x + \alpha + \beta) = \cos(\alpha + (x + \beta)) \\ &= \cos\alpha\cos(x + \beta) - \sin\alpha\sin(x + \beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

Ist endlich nicht bloß β, sondern auch α negativ, so läßt sich, wie leicht zu sehen, ganz in der nämlichen Weise die Richtigkeit unserer Gleichungen darthun, so daß diese also ganz allgemein gelten, welche positiven oder negativen Werthe auch immer α und β repräsentiren mögen.

Durch die vorstehende Entwickelung sind offenbar auch die beiden Gleichungen des folgenden §. als richtig erwiesen, und es bedürfte hiernach einer besonderen Herleitung derselben aus der Figur eigentlich nicht. Wir haben jedoch diese um größerer Anschaulichkeit willen und mit Berücksichtigung des Bedürfnisses der Anfänger beigefügt*).

§. 28. Aufgabe.

Wenn die Sinus und Cosinus zweier spitzen Winkel α und β gegeben sind, den Sinus und Cosinus ihrer Differenz zu berechnen.

Auflösung.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Beweis. Es sei in Fig. 8 Winkel BCD $= \alpha$ und BCA $= \beta$, also ACD $= \alpha - \beta$. Wir construiren hier in ähnlicher Art wie in §. 26, indem wir um den Scheitelpunkt C mit einem der Längeneinheit gleichen Radius einen Kreis beschreiben, welcher die Schenkel der gegebenen Winkel in den Punkten A, B, D durchschneidet, dann aus dem Punkte A, (in welchem der Kreis denjenigen Schenkel des Winkels β durchschneidet, welchen derselbe mit α nicht gemeinschaftlich hat), auf CD und CB die Lote AE und AF, ferner aus den Punkten B und F auf CD die Lote BG und FH fällen und endlich noch AK $\perp$ FH ziehen. Dann ist

1) $\sin\alpha = BG,\ \cos\alpha = CG$

2) $\sin\beta = AF,\ \cos\beta = CF;$

und wir werden

3) $\sin(\alpha - \beta) = AE = FH - FK$

---

*) Der obige Beweis für die Gleichungen der §§. 26 und 28 dürfte wohl der kürzeste von allen für diese Formeln bis jetzt bekannt gewordenen gründlichen Beweisen sein.

finden, wenn wir FH und FK berechnen. In den ähnlichen Dreiecken FCH und BCG verhält sich

$$FH : BG = CF : CB,$$

d. h.

$$FH : \sin\alpha = \cos\beta : 1.$$

Demnach ist

$$4)\quad FH = \sin\alpha\cos\beta.$$

Ferner ist auch $\triangle AFK \sim BCG$; denn es ist Winkel $K = G = 90^0$ und Winkel $AFK = BCG = \alpha$, indem sowohl $AFK + CFH = 90^0$ als auch $CFH + BCG = 90^0$ ist. In den ähnlichen Dreiecken AFK und BCG verhält sich

$$FK : CG = AF : BC,$$

d. h.

$$FK : \cos\alpha = \sin\beta : 1;$$

folglich ist

$$5)\quad EK = \cos\alpha\sin\beta.$$

Setzen wir die in (4) und (5) erhaltenen Werthe von FH und FK in (3) ein, so ergibt sich

$$6)\quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Wir werden ferner

$$7)\quad \cos(\alpha - \beta) = CE = CH + AK$$

finden, wenn wir CH und AK berechnen. Nun verhält sich zunächst in den ähnlichen Dreiecken FCH und BCG

$$CH : CG = CF : BC,$$

d. h.

$$CH : \cos\alpha = \cos\beta : 1,$$

woraus

$$8)\quad CH = \cos\alpha\cos\beta$$

hervorgeht. Ferner verhält sich in den ähnlichen Dreiecken AFK und BCG

$$AK : BG = AF : BC,$$

d. h.

$$AK : \sin\alpha = \sin\beta : 1;$$

folglich ist

$$9)\quad AK = \sin\alpha\sin\beta.$$

Aus (7), (8) und (9) ergibt sich

$$10)\quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Daß die beiden Gleichungen dieses §. nicht bloß unter der Voraussetzung, daß α und β positive spitze Winkel bezeichnen, sondern ganz allgemein gelten, ist bereits in der Anmerkung zu §. 27 dargethan, indem $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ in $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$ übergehen, wenn man $-\beta$ an die Stelle von $+\beta$ schreibt.

§. 29, a. Zusatz.

Wenn man in den beiden Formeln des §. 26 $\beta = \alpha$ setzt, so gelangt man leicht weiter zu folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$2)\quad \cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2$$
$$3)\quad 1 + \cos 2\alpha = 2\cos\alpha^2$$
$$4)\quad 1 - \cos 2\alpha = 2\sin\alpha^2.$$

Beweis. Denn nach dem angeführten §. ist

1) $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

2) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2$

3) und 4) Wenn wir zu der Gleichung des §. 20

$$1 = \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2$$

einmal die so eben erhaltene Gleichung (2)

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2$$

addiren, das anderemal davon subtrahiren, so bekommen wir weiter

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos\alpha^2$$
$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin\alpha^2.$$

*§. 29, b. Zusatz.

Da $\alpha = 2 \,.\, {}^1/_2\alpha$ ist, so können wir den so eben erwiesenen Gleichungen auch folgende Form geben:

$$1)\quad \sin \alpha = 2 \sin {}^1/_2\,\alpha \cos {}^1/_2\alpha$$
$$2)\quad \cos \alpha = \cos {}^1/_2\alpha^2 - \sin {}^1/_2\alpha^2$$
$$3)\quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos {}^1/_2\alpha^2$$
$$4)\quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin {}^1/_2\alpha^2.$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt weiter

$$5)\quad \cos {}^1/_2\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$
$$6)\quad \sin {}^1/_2\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Diese Gleichungen können dazu dienen, wenn der Cosinus eines Winkels bekannt ist, den Sinus und Cosinus des halben Winkels, (z. B. aus dem Cosinus von 30^0 oder 18^0 den Sinus und Cosinus von 15^0 oder 9^0) zu berechnen.

Wenn wir die Gleichungen (1), (3) und (4) durch einander dividiren, so erhalten wir ferner

$$7)\quad \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \text{tang } {}^1/_2\alpha$$
$$8)\quad \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \text{cotg } {}^1/_2\alpha$$
$$9)\quad \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \text{cotg } {}^1/_2\alpha^2.$$

Wenn wir in den Gleichungen (3) und (4) $90^0 - \alpha$ statt α setzen und erwägen, daß der Cosinus eines Winkels gleich dem Sinus des Complements ist, so finden wir noch

$$10)\quad 1 + \sin \alpha = 2 \cos (45^0 - {}^1/_2\alpha)^2 = 2 \sin (45^0 + {}^1/_2\alpha)^2$$

und
$$11)\quad 1 - \sin \alpha = 2 \sin (45^0 - {}^1/_2\alpha)^2 = 2 \cos (45^0 + {}^1/_2\alpha)^2,$$

folglich
$$12)\quad \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} = \text{cotg } (45^0 - {}^1/_2\alpha)^2 = \text{tang } (45^0 + {}^1/_2\alpha)^2$$

*§. 30. Zusatz.

Wenn man den Winkel 3α in $2\alpha + \alpha$ zerfällt, so lassen sich mit Benutzung der Gleichungen der §§. 26 und 29, a. auch leicht die beiden folgenden Gleichungen erweisen.

$$1)\quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin \alpha^3$$

und
$$2)\quad \cos 3\alpha = 4 \cos \alpha^3 - 3 \cos \alpha.$$

§. 31, a. Zusatz.

Mit Hülfe der für den Sinus und Cosinus der Summe oder Differenz zweier Winkel in den §§. 26 und 28 erwiesenen Formeln, lassen sich auch die Tangente oder Cotangente der Summe oder Differenz zweier Winkel finden. Es ist nämlich

$$1)\quad \text{tang } (\alpha + \beta) = \frac{\text{tang } \alpha + \text{tang } \beta}{1 - \text{tang } \alpha \text{ tang } \beta}$$
$$2)\quad \text{tang } (\alpha - \beta) = \frac{\text{tang } \alpha - \text{tang } \beta}{1 + \text{tang } \alpha \text{ tang } \beta}$$

$$3)\quad \operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}$$

$$4)\quad \operatorname{cotg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta+1}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}$$

Bew. Denn nach §. 19 und 26 ist

$$1)\quad \operatorname{tang}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta},$$

folglich wenn wir Zähler und Nenner des so eben erhaltenen Bruches durch das Product $\cos\alpha\cos\beta$ dividiren und $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ durch $\operatorname{tang}\alpha$ und $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ durch $\operatorname{tang}\beta$ ersetzen,

$$2)\quad \operatorname{tang}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta}{1-\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}.$$

Ferner ist $3)\ \operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$.

Wenn wir Zähler und Nenner dieses Bruches durch $\sin\alpha\sin\beta$ dividiren und

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{cotg}\alpha \text{ und } \frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\operatorname{cotg}\beta$$

setzen, so erhalten wir

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\alpha}.$$

Die Gleichungen (2) und (4) aber ergeben sich auf ganz ähnliche Weise aus den Differenzformeln des §. 28.

§. 31, b. Zusatz.

Wenn wir in den Gleichungen (1) und (3) des vorhergehenden §. $\alpha=\beta$ setzen, so erhalten wir noch

$$\operatorname{tang}2\alpha=\frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1-\operatorname{tang}\alpha^2}$$

und

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}\alpha^2-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}.$$

§. 32. Lehrsatz.

Wenn drei Winkel α, β, γ zusammen einen Rechten ausmachen, so ist die Summe ihrer Cotangenten gleich dem Producte derselben, in Zeichen

$$\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\gamma=\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\operatorname{cotg}\gamma.$$

Beweis. Zufolge §. 31, a ist

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta},$$

und da nach der Voraussetzung der Winkel $\alpha+\beta$ den Winkel γ zu 90^0 ergänzt, so ist auch

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tang}\gamma=\frac{1}{\operatorname{cotg}\gamma}.$$

Aus der Verknüpfung dieser beiden Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}=\frac{1}{\operatorname{cotg}\gamma},$$

und wenn wir die Brüche wegschaffen,

$$\cot\alpha \cot\beta \cot\gamma - \cot\gamma = \cot\alpha + \cot\beta,$$

also

$$\cot\alpha \cot\beta \cot\gamma = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma.$$

Wir werden von diesem merkwürdigen Satze weiter unten (§. 67) nützlichen Gebrauch machen. — In ganz ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß wenn drei Winkel α, β, γ zusammen einen Flachen ausmachen, die Summe ihrer Tangenten gleich dem Producte derselben ist, also

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma.$$

*§. 33. Lehrsatz.

Wenn wir die halbe Summe zweier Winkel mit σ und ihre halbe Differenz mit ϑ bezeichnen, also

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \sigma \text{ und } \frac{\alpha-\beta}{2} = \vartheta$$

setzen, so ist $\alpha = \sigma + \vartheta$ und $\beta = \sigma - \vartheta$,

folglich nach §. 26 und 28

$$\sin\alpha = \sin(\sigma+\vartheta) = \sin\sigma\cos\vartheta + \cos\sigma\sin\vartheta$$

und

$$\sin\beta = \sin(\sigma-\vartheta) = \sin\sigma\cos\vartheta - \cos\sigma\sin\vartheta.$$

Addiren und subtrahiren wir diese Gleichungen, so erhalten wir

$$1)\quad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\sigma\cos\vartheta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2)\quad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\sigma\sin\vartheta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\,\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ferner ist nach §. 26 und 28

$$\cos\alpha = \cos(\sigma+\vartheta) = \cos\sigma\cos\vartheta - \sin\sigma\sin\vartheta$$

und

$$\cos\beta = \cos(\sigma-\vartheta) = \cos\sigma\cos\vartheta + \sin\sigma\sin\vartheta,$$

folglich wenn wir diese Gleichungen das einemal addiren, das anderemal die obere von der untern subtrahiren,

$$3)\quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\sigma\cos\vartheta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$4)\quad \cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\sigma\sin\vartheta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\,\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Diese Gleichungen lehren die Summe und Differenz zweier Sinus oder Cosinus durch ein Product ersetzen (und finden besonders beim Rechnen mit Logarithmen vortheilhafte Anwendung).

*§. 34. Zusatz.

Eine gleiche Umwandlung läßt sich auch dann bewerkstelligen, wenn ein Sinus und ein Cosinus addirt oder subtrahirt werden sollen. Setzen wir nämlich in den Gleichungen (1) und (2) des vorhergehenden §. $90^0 - \alpha$ statt α und berücksichtigen, daß der Cosinus eines Winkels gleich dem Sinus des Complementes ist, so erhalten wir

$$1)\quad \cos\alpha + \sin\beta = \sin(90^0 - \alpha) + \sin\beta$$

$$= 2\sin\left(45^0 - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(45^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(45^0 + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(45^0 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

2) $\cos\alpha - \sin\beta = \sin(90^0 - \alpha) - \sin\beta$

$$= 2\cos\left(45^0 - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(45^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(45^0 + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(45^0 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

*§. 35. Zusatz.

Wenn wir ferner in den Gleichungen (1) und (2) des §. 33 $\beta = 90^0 - \alpha$ setzen, so erhalten wir

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin(90^0 - \alpha) = 2\sin 45^0 . \cos(\alpha - 45^0)$$

und $\sin\alpha - \cos\alpha = \sin\alpha - \sin(90^0 - \alpha) = 2\cos 45^0 . \sin(\alpha - 45^0)$. Nun ist aber, wie leicht zu zeigen (S. unten §. 38), $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \sqrt{1/2} = 1/2\sqrt{2}$, ferner $\cos(\alpha - 45^0) = \cos(45^0 - \alpha) = \sin(45^0 + \alpha)$ und $\sin(\alpha - 45^0) = -\sin(45^0 - \alpha)$; hierdurch verwandeln sich die zuletzt erhaltenen Gleichungen in

1) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2} . \sin(45^0 + \alpha)$

und 2) $\sin\alpha - \cos\alpha = -\sqrt{2} . \sin(45^0 - \alpha)$.

*§. 36. Zusatz.

Für die Summe oder Differenz der Tangenten oder Cotangenten zweier Winkel erhält man noch leicht folgende Formeln:

1) $$\operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

2) $$\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

3) $$\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{tang}\alpha = \frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\cos\alpha\sin\beta}.$$

Setzen wir endlich noch in den beiden Gleichungen, welche in der letzten Formel zusammengefaßt sind, $\beta = \alpha$, so verwandeln sich dieselben, da $\cos(\alpha - \alpha) = \cos 0 = 1$ und $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ ist, in

4) $$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

5) $$\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tang}\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} = 2\operatorname{cotg} 2\alpha.$$

*§. 37. Zusatz.

Wenn wir die Gleichungen

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

und $$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

mit einander multipliciren, so erhalten wir

1) $$\sin(\alpha + \beta) . \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha^2 - \sin\beta^2 = \cos\beta^2 - \cos\alpha^2.$$

Eben so ergibt sich aus der Multiplication der Gleichungen

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

und $$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

die folgende Gleichung

2) $$\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha^2 - \sin\beta^2 = \cos\beta^2 - \sin\alpha^2.$$

Durch diese Gleichungen werden wir in den Stand gesetzt, die Differenz der Quadrate der Sinus oder Cosinus zweier Winkel durch ein Product zu ersetzen.

Bemerkung.

Die vorhergehenden Entwickelungen, welche sich sämmtlich auf die Summen- und Differenzformeln der §§. 26 u. 28 stützten, gewähren uns auch die Mittel für den Beweis des folgenden wichtigen Satzes.

***§. 37. Lehrsatz.**

Wenn ein Winkel α, welcher 180^0 nicht übersteigt, in zwei, drei oder mehr Theile getheilt wird, so fällt die Summe und eben so das Product der Sinus dieser Theile dann am größten aus, wenn sämmtliche Theile einander gleich sind.

Beweis. Wenn wir den Winkel α zunächst in zwei Theile x und y zerlegen, so ist nach §. 33 die Summe der Sinus

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{x-y}{2};$$

und nach §§. 26 und 28 ist das doppelte Product der Sinus

$$2 \sin x \sin y = \cos (x - y) - \cos (x + y) = \cos (x - y) - \cos \alpha.$$

Nach §. 9 ist der Cosinus eines Winkels, welcher 180^0 nicht übersteigt, um so größer, je kleiner der Winkel ist, und am größten, wenn der Winkel verschwindet. Die vorstehenden Ausdrücke erhalten daher dann ihren größten Werth, wenn $x - y = o$, also $x = y$ ist.

Denken wir uns von dem Winkel α irgend einen Theil z hinweggenommen und den Rest $\alpha - z$ in zwei Theile x und y zerlegt, so werden zufolge des eben Erwiesenen

die Summe $\sin x + \sin y$ und das Product $\sin x \sin y$

und folglich auch bei dem für z angenommenen Werthe

die Summe $\sin x + \sin y + \sin z$ und das Product $\sin x \sin y \sin z$

dann am größten, wenn $x = y$ ist. — Eben so läßt sich zeigen, daß $x = y = z$ sein muß, wenn überhaupt diese Summe und dieses Product ihren größten Werth erhalten sollen.

In gleicher Weise fortfahrend wird die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung dargethan, wenn der gegebene Winkel in vier und mehr Theile getheilt sein sollte.

In Betreff der Tangenten läßt sich in ähnlicher Art der folgende Satz erweisen: Wenn ein Winkel, welcher kleiner als 90^0 ist, in zwei oder mehr Theile getheilt wird, so ist dann die Summe der Tangenten dieser Theile am kleinsten und das Product derselben am größten, wenn alle Theile einander gleich sind.

Zum Schlusse dieses Capitels führen wir noch die folgenden Formeln an, welche von drei Winkeln α, β, γ, in dem Falle gelten, daß dieselben, wie dies z. B. bei den Winkeln eines Dreiecks der Fall ist, zusammen einen Flachen ausmachen.

1) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos {}^1/_2\, \alpha \cos {}^1/_2\, \beta \cos {}^1/_2\, \gamma$

2) $\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin {}^1/_2\, \alpha \sin {}^1/_2\, \beta \cos {}^1/_2\, \gamma$

3) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin {}^1/_2\, \alpha \sin {}^1/_2\, \beta \sin {}^1/_2\, \gamma + 1$

4) $\cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = 4 \cos {}^1/_2\, \alpha \cos {}^1/_2\, \beta \sin {}^1/_2\, \gamma - 1$

5) $\sin 2\,\alpha + \sin 2\,\beta + \sin 2\,\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$

6) $\sin 2\,\alpha + \sin 2\,\beta - \sin 2\,\gamma = 4 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma$

7) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$
8) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma = 1 - 4 \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma$
9) $\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2 = 2 + 2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$
10) $\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2 = 2 \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma$
11) $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1 - 2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$
12) $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 = 1 - 2 \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma$.

Wir beschränken uns darauf, die Richtigkeit der ersten Gleichung darzuthun, indem wir den Beweis für die übrigen unseren Lesern zur eigenen Uebung überlassen.

Nach §. 33 ist

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

und da $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ ist, so ist

$$\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta) = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

folglich ist

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= 4 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \,.\, \cos\frac{\alpha}{2} \,.\, \cos\frac{\beta}{2}, \text{ oder da}$$

$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$ ist: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$.

Zwei den vorstehenden verwandte Gleichungen sind bereits oben (§. 32) aufgeführt worden.

D. Berechnung der trigonometrischen Functionen.

§. 38. Aufgabe.

Die trigonometrischen Functionen der Winkel von 45^0, 30^0 und 60^0 zu berechnen.

Auflösung.

$$\begin{aligned}
\sin 45^0 &= \sqrt{1/2} = \cos 45^0\\
\text{tang } 45^0 &= 1 = \text{cotg } 45^0\\
\sin 30^0 &= 1/2 = \cos 60^0\\
\cos 30^0 &= 1/2\sqrt{3} = \sin 60^0\\
\text{tang } 30^0 &= \sqrt{1/3} = \text{cotg } 60^0\\
\text{cotg } 30^0 &= \sqrt{3} = \text{tang } 60^0.
\end{aligned}$$

Beweis. Es sei Bogen AB $= 45^0$, Fig. 10; ziehen wir BD $\perp$ AC, so ist, da Winkel BCD $= 45^0$ vorausgesetzt ist, auch Winkel CBD $= 45^0$, daher Cathete BD $=$ CD. Bezeichnen wir nun diese gleichen Catheten mit x und den Radius BC mit r, so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$2x^2 = r^2,$$

folglich $x^2 = 1/2\, r^2$, also $x = r\sqrt{1/2}$.

Nun ist $\sin 45^0 = \frac{x}{r} = \frac{r\sqrt{1/2}}{r} = \sqrt{1/2}$

und $\text{tang } 45^0 = \frac{x}{x} = 1.$

Es sei ferner in Fig. 9 Bogen AB $= 30^0$; ziehen wir BD $\perp$ AC und verlängern diese Linie, bis sie den über A fortgesetzten Bogen AB in E

schneidet, so ist Bogen BE = 60^0, folglich die Sehne BE = BC = r, also BD = $^1/_2$ r. Demnach ist

$$\sin 30^0 = \frac{BD}{BC} = \frac{^1/_2\, r}{r} = {}^1/_2.$$

Bekanntlich ist $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1,$

also $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin \alpha^2}.$

Da wir nun bereits $\sin 30^0 = {}^1/_2$ gefunden haben, so ist folglich

$$\cos 30^0 = \sqrt{1 - {}^1/_4} = \sqrt{^3/_4} = \sqrt{^1/_4 \cdot 3} = {}^1/_2 \sqrt{3}.$$

Aus den so eben erhaltenen Werthen für $\sin 30^0$ und $\cos 30^0$ ergeben sich vermöge der Gleichungen des §. 19 leicht weiter

$$\operatorname{tang} 30^0 = \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0} = \frac{^1/_2}{^1/_2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{^1/_3}$$

und $$\operatorname{cotg} 30^0 = \frac{\cos 30^0}{\sin 30^0} = \frac{^1/_2\sqrt{3}}{^1/_2} = \sqrt{3}.$$

*§. 39. Zusatz.

Die Elementarmathematik lehrt bekanntlich in einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Dreieck, Viereck und Fünfeck zeichnen. Außer den genannten Vielecken lassen sich auch noch leicht diejenigen Vielecke zeichnen, welche durch Halbirung der Centriwinkel der angeführten Vielecke erhalten werden können, also zunächst das Sechseck, Achteck und Zehneck. Der Centriwinkel des Sechsecks ist = 60^0 und des Achtecks = 45^0. Die trigonometrischen Functionen dieser beiden Winkel sind bereits im vorhergehenden §. gefunden.

Ist C der Mittelpunkt, AC der Radius eines Kreises, Fig. 12, und AB die Seite des in den Kreis beschriebenen Zehnecks, so ist Winkel ACB = 36^0, und wenn wir CD $\perp$ AB ziehen, Winkel ACD = 18^0. Wir werden daher die trigonometrischen Functionen des Winkels von 18^0 finden, wenn wir im Stande sind, die Linie AB oder AD zu berechnen. Die Seite des in den Kreis zu zeichnenden Zehnecks aber wird erhalten, wenn wir den Radius AC im Punkte E nach stetiger Proportion theilen, so daß sich verhält

$$AC : CE = CE : AE,$$

und AB = CE machen. Dann ist AB die Seite des Zehnecks; denn wenn wir BE ziehen, so ist $\triangle$ ABE $\backsim$ ACB, da Winkel A gemeinschaftlich ist und nach der Construction sich

$$AC : AB = AB : AE$$

verhält, also beide Dreiecke in einem Winkel und dem Verhältnisse der einschließenden Seiten übereinstimmen. Folglich ist auch das Dreieck ABE gleichschenklig, also BE = AB = CE und Winkel ABE = ACB = CBE, daher Winkel BAC = ABC = 2 ACB. Da die Winkel eines jeden Dreiecks einen Flachen betragen, so ist Winkel

$$BAC + ABC + ACB = 180^0,$$

also, wenn wir der Kürze wegen, W. ACB = α setzen,

$$2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180^0, \text{ d. h. } 5\alpha = 180^0$$

und folglich $$\alpha = 36^0.$$

Nach der oben angegebenen Construction verhält sich

$$AC : CE = CE : AE.$$

Bezeichnen wir nun den Radius AC mit r, die gesuchte Seite des Zehnecks

AB = CE mit x, also AE mit r — x, so verwandelt sich diese Proportion in

$$r : x = x : r - x.$$

Hieraus ergibt sich

$$x^2 = r(r - x) = r^2 - rx$$

oder

$$x^2 + rx = r^2.$$

Lösen wir diese quadratische Gleichung auf bekannte Weise auf, so erhalten wir

$$x = -\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{5}{4}r^2} = \frac{r(-1 + \sqrt{5})}{2},$$

wo wir vor der Wurzel nur das Zeichen (+) gesetzt haben, weil x als Maßzahl einer Linie nicht negativ werden kann. Nun ist

$$\sin 18^0 = \sin ACD = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{1}{2}x}{r},$$

folglich, wenn wir den eben erhaltenen Werth von x einsetzen,

$$\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Hieraus folgt weiter

$$\cos 18^0 = \sqrt{1 - (\sin 18^0)^2} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\tang 18^0 = \frac{\sin 18^0}{\cos 18^0} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}$$

$$\cotg 18^0 = \frac{1}{\tang 18^0} = \sqrt{\frac{5}{5 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

*§. 40. Zusatz.

Nach §. 29, b ist

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \text{ und } \cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}.$$

Da nun in §. 38 cos 30⁰ bereits gefunden ist, so sind wir auch noch leicht im Stande, die trigonometrischen Functionen des Winkels von 15^0 zu berechnen. Mit Hilfe der Differenzformeln (§. 28) lassen sich dann weiter die Functionen des Winkels von $3^0 = 18^0 - 15^0$ und folglich auch die Functionen aller Vielfachen von 3^0, z. B. 6^0, 9^0, 12^0 u. s. w. herleiten.

In der Analysis (Algebraische Analysis. Essen, 1870, Kap. 2, §. 62) wird gezeigt, wie sich mit Hilfe unendlicher Reihen die trigonometrischen Functionen jedes beliebigen Winkels berechnen lassen.

Die am Schlusse dieses Buches abgedruckte Tafel enthält die Werthe der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten aller Winkel von 0^0 bis 90^0 von 10 zu 10 Minuten. Man nennt diese Zahlen die natürlichen trigonometrischen Functionen zum Unterschiede von den Logarithmen derselben, welche man die künstlichen Functionen zu nennen pflegt. Die logarithmischen Handbücher enthalten diese gewöhnlich von Minute zu Minute. Die diesem Buche beigefügte Tafel wird einer Erläuterung nicht bedürfen; über die Einrichtung der logarithmischen Tafeln ist die nöthige Erklärung in den betreffenden Handbüchern nachzusehen. Wir bemerken hier nur Folgendes:

Da die Sinus und Cosinus aller Winkel, die Tangenten der Winkel unter 45^0 und die Cotangenten der Winkel über 45^0 ächte Brüche sind, so müssen ihre Logarithmen negativ sein, so ist z. B. nach §. 38

$$\sin 30^0 = {}^1/_2 = 0{,}5,$$

folglich $\log \sin 30^0 = \log 0,5 = 0,69897 - 1,$

indem bekanntlich die Charakteristik eines Logarithmus so viel negative Einheiten hat, als Nullen an der Spitze des Numerus stehen. Da hiernach diese negative Charakteristik verschiedene Werthe erhalten kann, so pflegt man um größerer Bequemlichkeit willen statt $0 - 1$, $0 - 2$, $0 - 3$ u. s. w. $9 - 10$, $8 - 10$, $7 - 10$ u. s. w. zu setzen und dann der Kürze wegen den überall wiederkehrenden Subtrahenden 10 ganz wegzulassen. Man findet daher in der trigonometrischen Tafel,

$$\log \sin 30^0 = 9,69897,$$

wofür es eigentlich heißen soll

$$\log \sin 30^0 = 9,69897 - 10.$$

Zweiter Abschnitt.

Von der Auflösung der Dreiecke.

A. Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks.

§. 41. Erklärung.

Wenn wir mit der Hypotenuse AB eines rechtwinkligen Dreiecks ABC, Fig. 13, um den einen Endpunkt A einen Kreis beschreiben, welcher die Verlängerung der durch diesen Endpunkt gehenden Cathete AC in D schneidet, so ist, wenn wir A als Anfangspunkt der Coordinaten und AD als den positiven Schenkel der Abscissenaxe ansehen, die Hypotenuse AB gleich dem Radius, die dem Winkel A gegenüberliegende Cathete BC gleich der Ordinate und die anliegende Cathete AC gleich der Abscisse des Endpunktes B des Bogens BD. Da nun der Bogen BD und der zu demselben gehörige Centriwinkel BAD einerlei trigonometrische Functionen haben, so erhalten wir, wenn wir der Kürze wegen $AB = h$, $BC = a$ und $AC = b$ setzen, folgende Gleichungen:

$$\sin A = \frac{a}{h}, \quad \cos A = \frac{b}{h},$$

$$\operatorname{tang} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{cotg} A = \frac{b}{a}.$$

Da wir das eben Gesagte offenbar auf jedes beliebige rechtwinklige Dreieck übertragen können, so ergeben sich uns, wenn wir die obigen Gleichungen in Worten aussprechen, für die trigonometrischen Functionen eines Winkels an der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes folgende Begriffsbestimmungen:

Der Sinus ist gleich dem Verhältnisse der gegenüberliegenden Cathete zur Hypotenuse,

der Cosinus ist gleich dem Verhältnisse der anliegenden Cathete zur Hypotenuse,

die Tangente ist gleich dem Verhältnisse der gegenüberliegenden Cathete zur anliegenden,

die Cotangente ist gleich dem Verhältnisse der anliegenden Cathete zur gegenüberliegenden.

§. 42. Zusatz.

Wenden wir die nämliche Betrachtungsweise auf den Winkel B an, so erhalten wir für die trigonometrischen Functionen desselben folgende Ausdrücke:

$$\sin B = \frac{b}{h}, \quad \cos B = \frac{a}{h},$$

$$\operatorname{tang} B = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{cotg} B = \frac{a}{b}.$$

§. 43. Zusatz.

Aus den Gleichungen des vorvorhergehenden §.

$$1) \quad \sin A = \frac{a}{h}, \quad \cos A = \frac{b}{h}$$

folgt weiter: $2) \quad a = h \sin A, \quad b = h \cos A$

und hieraus: $3) \quad h = \frac{a}{\sin A}, \quad h = \frac{b}{\cos A}.$

Denken wir uns den Winkel A als gegeben, so können wir die Gleichungen (2) und (3) also in Worten aussprechen:

Die gegenüberliegende Cathete wird gefunden, wenn wir die Hypotenuse mit dem Sinus multipliciren;

die anliegende Cathete wird gefunden, wenn wir die Hypotenuse mit dem Cosinus multipliciren;

die Hypotenuse wird gefunden, wenn wir die gegenüberliegende Cathete durch den Sinus dividiren;

die Hypotenuse wird gefunden, wenn wir die anliegende Cathete durch den Cosinus dividiren.

Ferner können wir den Gleichungen

$$4) \quad \operatorname{tang} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{cotg} A = \frac{b}{a}$$

auch folgende Form

$$5) \quad a = b \operatorname{tang} A, \quad b = a \operatorname{cotg} A$$

geben. Aus diesen Gleichungen folgt:

Die gegenüberliegende Cathete wird erhalten, wenn wir die anliegende mit der Tangente multipliciren;

die anliegende Cathete wird gefunden, wenn wir die gegenüberliegende mit der Cotangente multipliciren *).

Wir haben in (2) und (3) die Gleichungen (1) doppelt, in (5) die Fundamentalgleichungen (4) nur einmal umgekehrt. Kehren wir dieselben ebenfalls nochmals um, so erhalten wir $6) \quad b = \frac{a}{\operatorname{tang} A}, \quad a = \frac{b}{\operatorname{cotg} A}.$

Da jedoch bekanntlich $\frac{1}{\operatorname{tang} A} = \operatorname{cotg} A$ und $\frac{1}{\operatorname{cotg} A} = \operatorname{tang} A$ ist, so sind die Gleichungen (6) von den bequemeren Gleichungen (5) nicht verschieden, welchen man daher in der Regel den Vorzug gibt.

---

*) Die Gleichungen dieses §. bilden die Grundlage aller folgenden Entwickelungen; es ist daher Sicherheit und Geläufigkeit in der Anwendung derselben ein unerläßliches Bedingniß für das leichte und rasche Erfassen des Folgenden.

§. 44. Erklärung.

Ein Dreieck trigonometrisch auflösen heißt aus drei gegebenen Stücken (Seiten und Winkel), welche das Dreieck bestimmen, die fehlenden trigonometrisch berechnen.

Bemerkung.

Bei der Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks haben wir folgende Fälle zu unterscheiden: Es können gegeben sein

1) die Hypotenuse und ein (spitzer) Winkel,
2) eine Cathete und ein Winkel,

(wobei es keinen Unterschied macht, ob der gegebene Winkel der gegebenen Cathete gegenüber oder an derselben liegt, da durch den einen Winkel an der Hypothenuse offenbar auch der andere mitgegeben ist),

3) die Hypotenuse und eine Cathete,
4) beide Catheten.

§. 45. Aufgabe.

Das rechtwinklige Dreieck ABC, Fig. 13, aufzulösen, wenn die Hypotenuse h und der Winkel A gegeben sind.

Auflösung. Wir suchen zuerst den Winkel $B = 90^0 - A$,
dann die gegenüberliegende Cathete $a = h \sin A$
und endlich die anliegende Cathete $b = h \cos A$.

Erstes Beispiel ohne Anwendung der Logarithmen*).

Es sei gegeben $h = 8,\ A = 65^0\ 20'$; so ist $B = 24^0\ 40'$,
ferner $a = 8 \,.\, \sin 65^0\ 20', = 8 \,.\, 0{,}9088 = 7{,}2704$
und $b = 8 \,.\, \cos 65^0\ 20', = 8 \,.\, 0{,}4173 = 3{,}3384.$

Berücksichtigen wir nur die erste Decimalstelle, so ist
$a = 7{,}2$ und $b = 3{,}3.$

Zweites Beispiel mit Benutzung der Logarithmen.

Es sei gegeben $h = 528,\ A = 37^0\ 18'$; so ist $B = 52^0\ 42'$,

$$\begin{array}{rlrl} \log h = & 2{,}72263 & \log h = & 2{,}72263 \\ + \log \sin A = & 9{,}78246 - 10 & + \log \cos A = & 9{,}90063 - 10 \\ \hline & 2{,}50509 & & 2{,}62326 \\ a = & 320{,}0 & b = & 420{,}0 \end{array}$$

§. 46. Aufgabe.

Das rechtwinklige Dreieck ABC, Fig. 13, aufzulösen, wenn die eine Cathete a und der ihr gegenüberliegende Winkel A gegeben sind.

Auflösung. Der fehlende Winkel wird erhalten durch die Gleichung
$B = 90^0 - A,$
Die Hypotenuse durch die Gleichung $h = \dfrac{a}{\sin A}$
und die anlieg. Cathete durch die Gleichung $b = a \operatorname{cotg} A.$

---

*) Der Verfasser hält es für zweckmäßig, Beispiele mit und ohne Logarithmen nicht gleichzeitig in Anwendung zu bringen, sondern im ersten Cursus um größerer Deutlichkeit willen nur Beispiele ohne Logarithmen rechnen zu lassen, bei einer Wiederholung der Trigonometrie im zweiten Cursus dagegen für sämmtliche Beispiele die Logarithmentafeln zu benutzen.

Erstes Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei gegeben $a = 15$, $A = 28^0\ 50'$; dann ist $B = 61^0\ 10'$; ferner

$$h = \frac{a}{\sin A} = \frac{15}{\sin 28^0\ 50'} = \frac{15}{0,4823} = 31,1$$

$$b = a \operatorname{cotg} A = 15\ .\ \operatorname{cotg} 28^0\ 50' = 15\ .\ 1,8165 = 27,2475,$$

oder wenn wir nur die erste Decimalstelle berücksichtigen, $b = 27,2$.

Zweites Beispiel mit Logarithmen.

Es sei $a = 87$, $A = 75^0\ 43'$; so ist $B = 14^0\ 17'$

$$\begin{array}{rl} \log a = & 1,93952 \\ -\log \sin A = & 9,98636 - 10 \\ \hline & 1,95316 \\ h = & 89,78 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log a = & 1,93952 \\ +\log \operatorname{cotg} A = & 9,40584 - 10 \\ \hline & 1,34536 \\ b = & 22,15. \end{array}$$

§. 47. Zusatz.

Wäre die Cathete a und der anliegende Winkel B gegeben, so würde man zunächst Winkel $A = 90^0 - B$ suchen und dann eben so wie im vorhergehenden §. verfahren.

§. 48. Aufgabe.

Das rechtwinklige Dreieck ABC, Fig. 13, aufzulösen, wenn die Hypotenuse h und eine Cathete a gegeben sind.

Auflösung. Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist die fehlende Cathete

$$b = \sqrt{h^2 - a^2}.$$

Ferner erhalten wir den Winkel A durch die Gleichung

$$\sin A = \frac{a}{h};$$

dann ist

$$\text{Winkel } B = 90^0 - A.$$

Erstes Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei $h = 16$, $a = 13$; dann ist

$$b = \sqrt{16^2 - 13^2} = \sqrt{256 - 169} = \sqrt{87} \doteq 9,3$$

$$\sin A = \frac{13}{16} = 0,8125, \text{ also } A = 54^0\ 20'$$

und folglich

$$B = 35^0\ 40'.$$

Zweites Beispiel mit Logarithmen.

Es sei gegeben $h = 7935$, $a = 2408$. Wir ordnen hier die Rechnung am bequemsten so, daß wir zuerst den Winkel A durch die Gleichung

$$\sin A = \frac{a}{h}$$

suchen und dann die fehlende Cathete b durch die Gleichung

$$b = h \cos A$$

berechnen. Die Ausrechnung ist hiernach folgende:

$$\begin{array}{rl} \log a = & 13,38166 - 10 \\ -\log h = & 3,89955 \\ \hline & 9,48211 - 10 \\ A = & 17^0\ 40', \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log h = & 3,89955 \\ +\log \cos A = & 9,97902 - 10 \\ \hline & 3,87857 \\ b = & 7561 \end{array}$$

folglich $B = 72^0\ 20'$.

§. 49, a. Aufgabe.

Das rechtwinklige Dreieck ABC, Fig. 13, aufzulösen, wenn die beiden Catheten a und b gegeben sind.

Auflösung. Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist die Hypotenuse

$$h = \sqrt{a^2 + b^2};$$

den Winkel A aber erhalten wir durch die Gleichung

$$\text{tang } A = \frac{a}{b};$$

dann ist Winkel $B = 90^0 - A$.

Erstes Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei gegeben $a = 4$, $b = 3$; dann ist

$$h = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{tang } A = {}^4/_3 = 1{,}3333, \text{ also } A = 53^0\ 10' \text{ und } B = 36^0\ 50'.$$

Zweites Beispiel mit Logarithmen.

Es sei gegeben $a = 718$, $b = 590$. Wir suchen hier am bequemsten zuerst den Winkel A durch die Gleichung

$$\text{tang } A = \frac{a}{b}$$

und hierauf die Hypot. durch die Gleichung

$$h = \frac{a}{\sin A}.$$

Die Rechnung ist nun folgende:

$\log a = 2{,}85612$	$\log a = 2{,}85612$
$-\log b = 2{,}77085$	$-\log \sin A = 9{,}88793 - 10$
$0{,}08527$	$2{,}96819$
$A = 50^0\ 35'$	$h = 929{,}4.$
$B = 39^0\ 25'.$	

§. 49, b. Zusatz.

Die vorhergehenden Sätze über die Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks lassen unter anderen folgende Anwendungen zu:

1) Ist $BC = a$, Fig. 13, die gesuchte Höhe eines Baumes oder Thurmes, so ergibt sich dieselbe, wenn man die Standlinie $AC = b$ und den Elevationswinkel $BAC = \alpha$ gemessen hat, durch die Gleichung

$$a = b \text{ tang } \alpha.$$

2) Ist die Höhe eines senkrechten Stabes $BC = a$, Fig. 13, und die Länge des Schattens $AC = b$, welchen derselbe auf eine wagerechte Ebene wirft, gegeben, so erhält man den Höhenwinkel der Sonne über dem Horizonte $BAC = \alpha$ durch die Gleichung

$$\text{tang } \alpha = \frac{a}{b}.$$

3) Wenn wir uns von der Spitze A, Fig. 26, eines Berges, dessen Höhe $AB = a$ gegeben ist, eine Tangente AD an die kugelförmige Oberfläche der Erde gezogen denken, so zeigt der Bogen BD die Weite an, bis zu welcher man von A aus die Erdoberfläche überblicken kann. Bezeichnen wir den Centriwinkel dieses Bogens mit γ und den Radius der Erde $BC = CD$ mit r, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ADC

$$\cos \gamma = \frac{CD}{AC} = \frac{r}{r + a}.$$

Ist aus dieser Gleichung der Winkel γ gefunden, so gibt die Zahl der Grade desselben mit 15 multiplicirt die Größe des Bogens BD in geographischen Meilen an.

4) Wenn eine Eisenbahn aus einer Richtung AB, Fig. 18, in eine andere Richtung DE, durch eine Curve, einen Kreisbogen, übergeführt werden soll und der Radius BC $=$ CD $= \rho$ und der Winkel BFD, unter welchem sich die verlängerten geraden Bahnlinien AB und DE schneiden, $= \alpha$ gegeben ist, so wird der Abstand der Berührungspunkte B und D von dem Durchschnittspunkte F, wenn wir diesen Abstand BF $=$ DF mit a bezeichnen, erhalten durch die Gleichung $a = \rho \operatorname{cotg} {}^1/_2\, \alpha.$

5) Wenn dagegen der Anschlußpunkt B der Curve an die gerade Bahnlinie AB und folglich auch BF $=$ DF $=$ a gegeben ist und der Krümmungsradius ρ gesucht werden soll, so wird dieser gefunden durch die Gleichung

$$\rho = a \operatorname{tang} {}^1/_2\, \alpha.$$

Zu der dritten Aufgabe bemerken wir noch Folgendes: Da die Höhe eines Berges auf der Erde gegen den Radius derselben nur klein ist und daher auch der Bogen BD nur eine geringe Größe hat, so werden wir ohne erheblichen Fehler den Bogen BD mit der Tangente AD verwechseln dürfen, zumal es bei dieser Aufgabe wohl überhaupt nicht auf einen hohen Grad von Genauigkeit abgesehen sein dürfte. Setzen wir daher BD $=$ AD $=$ w, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ADC

$$w^2 = (r + a)^2 - r^2 = 2ar + a^2,$$

also
$$w = \sqrt{2ar + a^2}.$$

Beschränken wir uns, wenn wir die gesuchte Gesichtsweite in geographischen Meilen ausdrücken, auf die erste Decimalstelle, so bemerken wir ferner bei dem Ausziehen der Quadratwurzel sehr bald, daß das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen (a^2) auf das Resultat unserer Richtung keinen Einfluß hat; wir werden daher auch kürzer setzen können

$$w = \sqrt{2ar}.$$

Der so erhaltene Werth von w bedarf jedoch, wenn er der wirklichen Beobachtung entsprechen soll, noch einer Correction wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung. (S. Anfangsgründe der Physik §. 198).

In der folgenden Tabelle bedeutet a die Höhe eines Berges, in Tausendteln einer geogr. Meile ausgedrückt, (eine Tausendtel-Meile $=$ 24 preuß. Fuß $=$ 23 Par. Fuß $=$ 7,5 Meter ohngefähr), w die Gesichtsweite ohne Strahlenbrechung in geogr. Meilen und w′ die durch die Strahlenbrechung vergrößerte Gesichtsweite, wenn diese Vergrößerung zu 7 Procent angenommen wird.

a	1	10	100	1000
w	1,3	4,1	13,1	41,4
w′	1,4	4,4	14,0	44,3

B. Auflösung des gleichschenkligen Dreiecks.

Bemerkung.

Bei der Auflösung des gleichschenkligen Dreiecks haben wir folgende Fälle zu unterscheiden. Es können gegeben sein

1) eine Seite und ein Winkel, (wobei es gleichgiltig ist, ob der Winkel an der Spitze oder an der Grundlinie liegt, da, wie leicht zu sehen, die Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks sämmtlich bestimmt sind, wenn einer derselben gegeben ist);

2) die Grundlinie und ein Winkel;
3) eine Seite und die Grundlinie.

Wir bezeichnen im Folgenden der Kürze wegen im gleichschenkligen Dreiecke ABC, Fig. 14, die gleichen Seiten AB und AC mit b und die Grundlinie BC mit a.

§. 50. Aufgabe.

Das gleichschenklige Dreieck ABC, Fig. 14, aufzulösen, wenn eine Seite b und der Winkel an der Spitze A gegeben sind.

Auflösung. Wenn wir die Höhe AD ziehen, so wird bekanntlich die Grundlinie und der Winkel an der Spitze halbirt. Nun ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ABD

Winkel $B = 90^0 - {}^1/_2 A$

und Cathete $BD = b \sin {}^1/_2 A$,

also $a = BC = 2b \sin {}^1/_2 A$.

Wir fügen dieser und den beiden folgenden Aufgaben keine in bestimmten Zahlen ausgeführten Beispiele bei, da die hier anzuwendenden Rechnungsarten mit den oben für das rechtwinklige Dreieck durchgeführten übereinstimmen.

§. 51. Aufgabe.

Das gleichschenklige Dreieck ABC, Fig. 14, aufzulösen, wenn die Grundlinie BC = a und der Winkel A an der Spitze gegeben sind.

Auflösung. Zunächst ist der Winkel

$$B = 90^0 - {}^1/_2 A,$$

und wenn wir die Höhe AD ziehen, Seite

$$b = \frac{BD}{\sin {}^1/_2 A} = \frac{{}^1/_2 a}{\sin {}^1/_2 A} = \frac{a}{2 \sin {}^1/_2 A}.\;^{*)}$$

§. 52. Aufgabe.

Das gleichschenklige Dreieck ABC, Fig. 14, aufzulösen, wenn eine Seite AB = b und die Grundlinie BC = a gegeben sind.

Auflösung. Ziehen wir wieder die Höhe AD, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ABD

$$\sin {}^1/_2 A = \frac{BD}{b} = \frac{{}^1/_2 a}{b} = \frac{a}{2b}.$$

Ist aus dieser Gleichung ${}^1/_2 A$, also auch A gefunden, so ist $B = 90^0 - {}^1/_2 A$.

C. Auflösung des Dreiecks überhaupt.

Bemerkung.

Während die nächstvorhergehenden Sätze lediglich das rechtwinklige und das gleichschenklige Dreieck betrafen, gelten die nun folgenden Entwickelungen für sämmtliche Dreiecke, es mögen dieselben rechtwinklig oder schiefwinklig, gleichschenklig oder ungleichschenklig sein. Wir bezeichnen hierbei die Winkel des Dreiecks mit den großen Buchstaben des lateinischen Alphabets A, B und C und die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten mit den kleinen Buchstaben a, b und c. In Uebereinstimmung mit den Sätzen über die

---

*) Es würde sehr unrichtig sein, wenn man $2 \sin {}^1/_2 A = \sin A$ setzen wollte; vielmehr ist nach §. 29, b $\sin A = 2 \sin {}^1/_2 A \cos {}^1/_2 A$.

Congruenz der Dreiecke haben wir vier Fälle zu unterscheiden. Es können nämlich gegeben sein:

1) eine Seite und zwei Winkel, (wobei es gleichgiltig ist, ob die Winkel beide an der gegebenen Seite liegen oder der eine an derselben, der andere ihr gegenüber liegt, da durch zwei Winkel allemal auch der dritte Winkel des Dreiecks bestimmt ist);

2) zwei Seiten und der der einen gegenüberliegende Winkel;

3) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel;

4) alle drei Seiten.

Ehe wir zu der Behandlung der einzelnen Fälle übergehen, schicken wir die Gleichungen §. 53 und 54 voraus, welche die Grundlage für die Auflösung des Dreiecks überhaupt bilden.

§. 53, a. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ist $a \sin B = b \sin A$.

Beweis. Wir haben hier drei Fälle zu unterscheiden:

1) Wenn die Winkel A und B beide spitz sind, Fig. 15, so fällt die aus C auf AB gezogene Senkrechte CD innerhalb des Dreiecks ABC. Nun ist in dem rechtwinkl. Dreiecke BCD $CD = a \sin B$
und in dem rechtwinkl. Dreiecke ACD $CD = b \sin A$,
folglich $a \sin B = b \sin A$.

2) Die so eben erwiesene Gleichung bleibt auch dann noch richtig, wenn ein der Seite AB anliegender Winkel, z. B. A, ein stumpfer ist, Fig. 16, und daher das Lot CD außerhalb des Dreiecks fällt. Zunächst ist in dem rechtwinkl. Dreiecke BCD $CD = a \sin B$.
Bezeichnen wir ferner den spitzen Nebenwinkel CAD des stumpfen Winkels A mit α, so ist in dem rechtwinkl. Dreiecke ACD $CD = b \sin \alpha$,
oder da der Sinus des stumpfen Winkels gleich dem Sinus des spitzen Nebenwinkels, also $\sin A = \sin \alpha$ ist, $CD = b \sin A$
Folglich ist auch jetzt $a \sin B = b \sin A$.

3) Ist endlich der Winkel A, Fig. 17, ein rechter, so ist

$$\sin A = \sin 90^0 = 1.$$

Die zu erweisende Gleichung geht folglich über in

$$a \sin B = b \cdot 1 = b,$$

eine Gleichung, die sich uns bereits oben (§. 45) ergeben hat.

§. 53, b. Zusatz.

Die Gleichung des vorhergehenden §.

$$a \sin B = b \sin A$$

läßt sich auch in die Proportion

$$a : b = \sin A : \sin B$$

umformen, und da das für zwei Seiten des Dreiecks und die ihnen gegenüberliegenden Winkel Erwiesene auch für jedes andere Paar gelten muß, so können wir auch weiter folgern

$$a : c = \sin A : \sin C$$

und $$b : c = \sin B : \sin C.$$

Die drei vorstehenden Proportionen lassen sich in folgender Art zusammenziehen: $$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$
und liefern uns in Worten ausgedrückt den Satz:

Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel. — Man pflegt diesen Satz als den Sinussatz zu bezeichnen.

Derselbe setzt uns, wie wir weiter unten (§. 56 u. 57) sehen werden, allein schon in den Stand, die beiden ersten der in der Bemerkung auf Seite 40 u. 41 aufgeführten Aufgaben über die Auflösung des Dreiecks zu erledigen. Derselbe ergänzt überdies eine wesentliche Lücke der Planimetrie. In dieser wird zwar gezeigt, daß gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüberstehen, und daß der größeren Seite ein größerer Winkel gegenüberliegt; dagegen gibt die Planimetrie keinen Aufschluß darüber, wie allgemein das Verhältniß zweier Seiten eines Dreiecks durch die Größe der gegenüberliegenden Winkel bedingt wird, eine Lücke, welche durch den vorstehenden trigonometrischen Lehrsatz ausgefüllt wird.

*§. 54. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ist $c = a \cos B + b \cos A$.

Beweis. Wir haben hier so wie in §. 53,a drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Winkel A und B beide spitz sind, oder wenn einer derselben, z. B. A ein stumpfer oder ein rechter ist. Construiren wir eben so wie in §. 53, a, so ist in dem ersten Falle, Fig. 15,

$$c = BD + AD = a \cos B + b \cos A.$$

In dem zweiten Falle, Fig. 16, ist

$$c = BD - AD = a \cos B - b \cos \alpha.$$

Nach §. 13 ist der Cosinus des stumpfen Winkels A gleich dem Sinus des spitzen Nebenwinkels α, also

$$-\cos \alpha = +\cos A \text{ und } -b \cos \alpha = +b \cos A.$$

Setzen wir diesen Werth in die vorhergehende Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

Ist endlich drittens, Fig. 17, der Winkel $A = 90^0$, so ist $\cos A = 0$, und die zu erweisende Gleichung verwandelt sich folglich in

$$c = a \cos B,$$

eine Gleichung, deren Richtigkeit aus §. 45 hervorgeht.

Da in der Gleichung $c = a \cos B + b \cos A$ fünf Stücke, drei Seiten a, b, c und zwei Winkel A, B vorkommen, die trigonometrischen Aufgaben aber niemals dahin lauten, aus vier Stücken ein fünftes zu finden, sondern allemal die Forderung stellen, aus drei gegebenen Stücken ein viertes zu berechnen, so findet diese Gleichung bei der Auflösung der Dreiecke keine unmittelbare Verwendung; sie wird uns aber in den allgemeinen Ableitungen der weiterhin aufzuführenden trigonometrischen Formeln, durch welche die Auflösung der 3. und 4. der in der Bemerkung auf Seite 40 u. 41 zusammengestellten Aufgaben gewonnen wird, wesentliche Unterstützung gewähren.

*§. 55. Zusatz.

In den beiden Gleichungen

$$1) \quad a \sin B = b \sin A$$

und

$$2) \quad c = a \cos B + b \cos A,$$

welche wir in den §§. 53,a und 54 für alle möglichen Dreiecke als richtig dargethan haben, ist die Auflösung des Dreiecks bereits vollständig enthalten. Denn da durch zwei Winkel eines Dreiecks bekanntlich der dritte bestimmt wird, so bleiben, wenn von einem Dreiecke drei Stücke gegeben sind, noch

zwei zu suchen übrig. Zwei Gleichungen reichen aber bekanntlich im Allgemeinen aus, um zwei gesuchte Größen zu berechnen, wie wir dies ausführlich im Einzelnen in den nächsten §§. entwickeln werden.

Wir haben die obigen Gleichungen beide aus der Figur nachgewiesen; es bedarf jedoch der synthetischen Herleitung nur für die erste dieser Gleichungen, indem sich aus derselben die andere auch auf rein analytischem Wege ableiten läßt. Da nämlich das für irgend zwei Seiten a und b eines Dreiecks Erwiesene offenbar auch für je zwei andere gelten muß, so können wir auch setzen:

$$c \sin A = a \sin C,$$

oder da $C = 180^0 - (A + B)$, also $\sin C = \sin (A + B)$ ist,

$$c \sin A = a \sin (A + B).$$

Entwickeln wir $\sin (A + B)$ nach der Summenformel, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$c \sin A = a \sin A \cos B + a \cos A \sin B,$$

oder da $a \sin B = b \sin A$ ist,

$$c \sin A = a \sin A \cos B + b \sin A \cos A,$$

also, wenn wir die ganze Gleichung durch sin A dividiren,

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

Es ist daher schon in der einfachen Gleichung

$$a \sin B = b \sin A$$

die ganze Trigonometrie enthalten.

§. 56. Aufgabe.

Das Dreieck ABC, Fig. 19, aufzulösen, wenn eine Seite a und zwei Winkel A und B gegeben sind.

Auflösung. Da zwei Winkel A und B gegeben sind, so ist auch der dritte Winkel 1) $C = 180^0 - (A + B)$

bekannt. Die fehlenden Seiten aber werden gefunden nach dem Sinussatze durch die Gleichungen

$$2)\quad b = \frac{a \sin B}{\sin A}\text{*)}. \qquad 3)\quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Erstes Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei gegeben $a = 57$, $A = 44^0\ 20'$ und $B = 23^0\ 40'$; dann ist

$$b = \frac{a \,.\, \sin B}{\sin A} = \frac{57 \,.\, 0{,}4014}{0{,}6988} = \frac{22{,}8798}{0{,}6988} = 32{,}7$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{57 \,.\, 0{,}9272}{0{,}6988} = \frac{52{,}8504}{0{,}6988} = 75{,}6.$$

(Man findet nämlich den Sinus des stumpfen Winkels $C = 112^0$, indem man den Sinus des spitzen Nebenwinkels $= 68^0$ aufschlägt).

Zweites Beispiel mit Logarithmen.

Es sei $a = 827$, $A = 101^0\ 40'$, $B = 20^0\ 30'$; dann ist

$$C = 57^0\ 50',$$

---

*) Es ist bequem, diese Gleichung zu lesen: b verhält sich zu a wie sin B zu sin A, und gleichzeitig zu schreiben: $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$.

und die fehlenden Seiten b und c werden gefunden durch folgende Rechnung:

$$\begin{array}{rl} \log a = & 2{,}91751 \\ +\log\sin B = & 9{,}54433 - 10 \\ \hline & 12{,}46184 - 10 \\ -\log\sin A = & 9{,}99093 - 10\text{*)} \\ \hline & 2{,}47091 \\ b = & 295{,}7 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log a = & 2{,}91751 \\ +\log\sin C = & 9{,}92763 - 10 \\ \hline & 12{,}84514 - 10 \\ -\log\sin A = & 9{,}99093 - 10 \\ \hline & 2{,}85421 \\ c = & 714{,}8. \end{array}$$

§. 57. Aufgabe.

Das Dreieck ABC, Fig. 19, aufzulösen, wenn zwei Seiten a und b und der der einen gegenüberliegende Winkel A gegeben sind.

Auflösung. Man suche zuerst den der andern Seite gegenüberliegenden Winkel B nach dem Sinussatze durch die Gleichung

$$1)\quad \sin B = \frac{b \sin A}{a}\text{**)}.$$

Dann ist auch der dritte Winkel

$$2)\qquad C = 180^0 - (A + B)$$

bekannt, und die fehlende Seite c ergibt sich durch die Gleichung

$$3)\qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Erstes Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei gegeben $a = 18$, $b = 12$, $A = 47^0\,40'$; dann ist

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{12\,.\,0{,}7392}{18} = 0{,}4928,$$

folglich

$$B = 29^0\,30',$$

$$C = 180^0 - (A + B) = 180^0 - 77^0\,10' = 102^0\,50',$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{18\,.\,0{,}9750}{0{,}7392} = \frac{17{,}5500}{0{,}7392} = 23{,}7.$$

Zweites Beispiel mit Logarithmen.

Ist $a = 17$, $b = 15$, $A = 41^0\,52'$, so ist die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{rl} \log b = & 1{,}17609 \\ +\log\sin A = & 9{,}82439 - 10 \\ \hline & 11{,}00048 - 10 \\ -\log a = & 1{,}23045 \\ \hline & 9{,}77003 - 10 \\ B = & 36^0\,5' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log a = & 1{,}23045 \\ +\log\sin C = & 9{,}99032 - 10 \\ \hline & 11{,}22077 - 10 \\ -\log\sin A = & 9{,}82439 - 10 \\ \hline & 1{,}39638 \\ c = & 24{,}91 \end{array}$$

$$C = 180^0 - (A + B) = 102^0\,3'.$$

§. 58. Zusatz.

Durch die Gleichung (1) des vorhergehenden §.

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

erhalten wir zunächst den Sinus des gesuchten Winkels B und hieraus diesen

---

*) Der Sinus des stumpfen Winkels $101^0\,40'$ ist nämlich gleich dem Sinus des spitzen Nebenwinkels $78^0\,20'$.

**) Man lese: sin B verhält sich zu b wie sin A zu a.

Winkel selbst. Weil aber jeder Sinus sowohl einem stumpfen als einem spitzen Winkel angehört, so liefert diese Gleichung zwei Werthe für B; und in der That existiren, wenn $a < b$, aber $> b \sin A$ ist, zwei verschiedene Dreiecke ABC und $AB'C$, Fig. 22, welche in den drei gegebenen Stücken, zwei Seiten a und b und dem der einen a gegenüberliegenden Winkel A, übereinstimmen, und bei denen die der andern gegebenen Seite b gegenüberliegenden Winkel ABC und $AB'C$ sich zu 180^0 ergänzen. Wenn dagegen $a > b$ ist, Fig. 19, so ist Winkel B nothwendig spitz, da nur der größten Seite im Dreiecke ein stumpfer Winkel gegenüberliegen kann; und es existirt daher in diesem Falle nur ein Dreieck, welches die gegebenen Stücke enthält. Von den beiden sich zu 180^0 ergänzenden Werthen, welche die Gleichung (1) für den Winkel B liefert, ist dann für die Auflösung der Aufgabe selbst nur der unter 90^0 liegende zu brauchen.

Wenn $a = b \sin A$ ist, so ist $\sin B = 1$, also $B = 90^0$ und folglich das aufzulösende Dreieck rechtwinklig.

Wenn endlich $a < b \sin A$ (d. h. a kleiner als das aus C auf AB gefällte Lot) sein sollte, so würde in der Gleichung (1) $\sin B > 1$, also Winkel B selbst unmöglich werden, da ein Sinus niemals größer als 1 sein kann; es existirt dann gar kein Dreieck, welches die gegebenen Stücke enthielte.

Die Gleichung (1) liefert hiernach für den Winkel B zwei brauchbare Werthe, wenn $a < b$, aber $> b \sin A$ ist. — Wenn aber B zwei Werthe erhält, so ist klar, daß sich dann aus der Gleichung (2) auch für den dritten Winkel C und folglich aus der Gleichung (3) für die dritte Seite c zwei Werthe ergeben.

Zur Erläuterung des eben Gesagten mögen folgende Beispiele dienen:

Erstes Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei gegeben $a = 12$, $b = 17$, $A = 33^0$. Dann ist

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{17 \,.\, 0{,}5446}{12} = 0{,}7715,$$

folglich $\quad B = 50^0\,30'$ und $129^0\,30'$.

Bezeichnen wir nun den Winkel ACB mit C und ACB' mit C', so ist Winkel $C = 180^0 - (A + B) = 96^0\,30'$ und $C' = 180^0 - (A + B') = 17^0\,30'$.

Bezeichnen wir ferner die Seite AB mit c und AB' mit c', so ist

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{12 \,.\, 0{,}9936}{0{,}5446} = 21{,}9$$

$$c' = \frac{a \sin C'}{\sin A} = \frac{12 \,.\, 0{,}3007}{0{,}5446} = 6{,}6.$$

Zweites Beispiel mit Logarithmen.

Es sei gegeben $a = 512$, $b = 716$, $A = 40^0\,40'$; dann ist die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{rl}
\log b = & 2{,}85491 \\
+ \log \sin A = & 9{,}81402 - 10 \\
\hline
& 12{,}66893 - 10 \\
- \log a = & 2{,}70927 \\
\hline
& 9{,}95966 - 10
\end{array}$$

$$B = 65^0\,41' \quad B' = 114^0\,19'$$
$$C = 73^0\,39', \quad C' = 25^0\,1'.$$

$$\begin{array}{rl} \log a = & 2{,}70927 \\ +\log\sin C = & 9{,}98207 - 10 \\ \hline & 12{,}69134 - 10 \\ -\log\sin A = & 9{,}81402 - 10 \\ \hline & 2{,}87732 \\ c = & 753{,}9 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log a = & 2{,}70927 \\ +\log\sin C' = & 9{,}62622 - 10 \\ \hline & 12{,}33549 - 10 \\ -\log\sin A = & 9{,}81402 - 10 \\ \hline & 2{,}52147 \\ c' = & 332{,}3 \end{array}$$

*§. 59. Zusatz.

Man kann die fehlende Seite c auch leicht unmittelbar durch die gegebenen Stücke a, b, A ausdrücken. Nach §. 54 ist nämlich

$$1)\quad c = b \cos A + a \cos B.$$

Da $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ ist, so ist $\cos B = \pm\sqrt{1 - \frac{b^2 \sin A^2}{a^2}}$ und $a \cos B = \pm\sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}$. Setzen wir diesen Werth in die Gleichung (1) ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$2)\quad c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}.$$

Diese Gleichung zeigt augenfällig, daß c möglicher Weise zwei Werthe erhalten kann, ferner daß dieselben in den einen Werth $c = b \cos A$ zusammenfallen, wenn $a = b \sin A$ ist, und daß c imaginär wird, wenn $a < b \sin A$ ist.

Endlich wollen wir noch bemerken, daß die Gleichung (2) sich auch erhalten läßt, wenn man die weiter unten (§. 62) zu erweisende Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

in Beziehung auf c auflöst.

Bemerkung.

Wir haben im Vorhergehenden die beiden ersten Aufgaben über die Auflösung des Dreiecks, (wenn eine Seite und zwei Winkel oder zwei Seiten und der der einen gegenüberliegende Winkel gegeben sind), lediglich mit Hilfe des Sinussatzes gewonnen. Dieser Satz reicht aber für die Auflösung der dritten Aufgabe, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, nicht aus, da in diesem Falle dem gegebenen Winkel keine der gegebenen Seiten gegenüber liegt. Wir müssen daher für die Auflösung dieser und der vierten Aufgabe (drei Seiten) neue Gleichungen zu bilden suchen, wie dies die folgenden §§. ausführlicher zeigen.

§. 60. Aufgabe.

Wenn von einem Dreiecke ABC, Fig. 19, zwei Seiten b und c und der eingeschlossene Winkel A gegeben sind, die beiden fehlenden Winkel B und C zu berechnen.

Auflösung. Wir berechnen zuerst den Winkel B durch die Gleichung

$$1)\quad \operatorname{tang} B = \frac{b \sin A}{c - b \cos A};$$

Dann ist

$$2)\qquad C = 180^0 - (A + B).$$

A. Synthetischer Beweis. Wir beschränken uns bei dem synthetischen Beweise dieses Satzes, (welcher nur wenig Anwendung findet), auf die einfachste Annahme, daß die Winkel A und B beide spitz sind. Wenn wir dann das aufzulösende Dreieck ABC, Fig. 15, durch das Lot CD in zwei rechtwinklige ACD und BCD zerschneiden, so ist in dem Dreiecke BCD

$$\text{tang } B = \frac{CD}{BD} = \frac{CD}{c - AD}.$$

und in dem Dreiecke ACD $\qquad CD = b \sin A,\ AD = b \cos A,$
folglich wenn wir diese Werthe in die vorhergehende Gleichung einsetzen,

$$\text{tang } B = \frac{b \sin A}{c - b \cos A}.$$

*B. **Analytischer Beweis.** In §. 53 und 54 ist ganz allgemein erwiesen

$$a \sin B = b \sin A$$

und

$$a \cos B = c - b \cos A.$$

Dividiren wir die erste Gleichung durch die zweite, so erhalten wir

$$\frac{a \sin B}{a \cos B} = \frac{b \sin A}{c - b \cos A},$$

oder da sich a im Zähler und Nenner aufhebt und bekanntlich $\frac{\sin B}{\cos B} = \text{tang } B$ ist,

$$\text{tang } B = \frac{b \sin A}{c - b \cos A}.$$

Erstes Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei gegeben $b = 10,\ c = 14,\ A = 70^0\ 10'$; dann ist

$$\text{tang } B = \frac{10\ .\ 0{,}9407}{14 - 10\ .\ 0{,}3393} = \frac{9{,}407}{10{,}607} = 0{,}8868,$$

also $\qquad B = 41^0\ 30'$ und $C = 180^0 - (A + B) = 68^2\ 20'.$

Zweites Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei $\qquad b = 8,\ c = 12,\ A = 140^0.$

Da der Winkel A hier ein stumpfer ist und die Tafel nur spitze Winkel enthält, so formen wir zweckmäßiger vor der Ausrechnung die obige Gleichung in folgender Art um. Wir bezeichnen den spitzen Nebenwinkel von A mit α; dann ist bekanntlich

$$\sin A = \sin \alpha,\quad \cos A = -\cos \alpha,\ \text{also}\ -\cos A = +\cos \alpha,$$

und die obige Gleichung $\qquad \text{tang } B = \dfrac{b \sin A}{c - b \cos A}$

verwandelt sich daher in: $\qquad \text{tang } B = \dfrac{b \sin A}{c + b \cos \alpha}.$

Hiernach erhalten wir für das angeführte Beispiel die Gleichung

$$\text{tang } B = \frac{8 \sin 40^0}{12 + 8 \cos 40^0} = \frac{8\ .\ 0{,}6428}{12 + 8\ .\ 0{,}7660} = \frac{5{,}1424}{18{,}1280} = 0{,}2837,$$

also $B = 15^0\ 50'$ und $C = 180^0 - (A + B) = 24^0\ 10'.$

Endlich wollen wir noch bemerken, daß, wenn wir die kleinere der gegebenen Seiten, was offenbar frei steht, mit b, die größere mit c bezeichnen, der Winkel B niemals anders als spitz ausfallen kann, weshalb wir für den Fall, daß B ein rechter oder stumpfer Winkel wird, kein Beispiel hinzufügen.

Wir übergehen ferner Beispiele mit Logarithmen gänzlich, da die Formel

$$\text{tang } B = \frac{b \sin A}{c - \cos A}$$

wegen des im Nenner vorkommenden Minuszeichens für das Rechnen mit Logarithmen unbequem ist, während wir später eine für diesen Zweck ganz geeignete Formel kennen lernen werden.

§. 61. Zusatz.

Wenn man aus zwei Seiten b und c und dem eingeschlossenen Winkel A eines Dreiecks nach Anleitung des vorhergehenden §. die fehlenden Winkel B und C gefunden hat, so ergibt sich die fehlende Seite a nach dem Sinussatze durch die Gleichung

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}.$$

Der folgende wichtige Lehrsatz aber lehrt uns diese Seite unmittelbar finden, ohne daß vorher die Winkel berechnet worden sind.

§. 62. Lehrsatz.

Bezeichnen wir die Seiten eines Dreiecks mit a, b, c und den der Seite a gegenüberliegenden Winkel mit A, so ist

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

A. Synthetischer Beweis. Wir haben hier drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Winkel A ein spitzer, stumpfer oder rechter ist*). Es sei zunächst Winkel A und auch Winkel B spitz; dann fällt das Lot CD, Fig. 15, innerhalb des Dreiecks ABC. Nun ist in dem rechtwinkligen Dreiecke BCD nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$a^2 = CD^2 + BD^2.$$

Setzen wir BD = c — AD, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$a^2 = CD^2 + (c - AD)^2,$$

oder wenn wir die Klammern auflösen,

$$a^2 = CD^2 + c^2 - 2c \,.\, AD + AD^2.$$

In dem rechtwinkligen Dreiecke ACD ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$CD^2 + AD^2 = b^2.$$

Wir können daher die vorhergehende Gleichung auch kürzer so schreiben:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \,.\, AD.$$

Nun ist aber in dem rechtwinkligen Dreiecke ACD

$$AD = b \,.\, \cos A,$$

wonach die zuletzt erhaltene Gleichung übergeht in:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \,.\, b \,.\, \cos A = b^2 + c^2 - 2b \,.\, c \,.\, \cos A.$$

Sollte der Winkel B ein stumpfer (oder rechter) sein, so ist jedenfalls C spitz und wir werden dann, wenn wir das Lot nicht aus C, sondern aus B fällen, den Beweis ganz eben so führen können.

Um ferner die Richtigkeit unserer Gleichung darzuthun, wenn der Winkel A, Fig. 16, ein stumpfer ist, ziehen wir aus einer der beiden andern Ecken, z. B. aus C auf die gegenüberliegende Seite AB eine Senkrechte CD, welche diesmal die Verlängerung derselben trifft, weil wir Winkel A als stumpf angenommen haben. Nun ist in dem rechtwinkligen Dreiecke BCD

$$a^2 = CD^2 + BD^2,$$

oder da BD = c + AD ist, $a^2 = CD^2 + (c + AD)^2$

$$= CD^2 + c^2 + 2c \,.\, AD + AD^2.$$

Ersetzen wir wieder $CD^2 + AD^2$ durch b^2, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \,.\, AD.$$

---

*) Wir führen hier, abweichend von §. 60, wegen der großen Wichtigkeit der obigen Gleichung auch den synthetischen Beweis um größerer Deutlichkeit willen vollständig für alle möglichen Fälle.

Bezeichnen wir den spitzen Nebenwinkel von A mit α, so erhalten wir aus dem rechtwinkligen Dreiecke ACD $AD = b \cos \alpha$, und wenn wir diesen Werth in die vorhergehende Gleichung einsetzen,

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha.$$

Da der Cosinus eines stumpfen Winkels dem negativen Cosinus des spitzen Nebenwinkels gleich ist, so ist

$$+ \cos A = - \cos \alpha, \text{ also } + \cos \alpha = - \cos A.$$

Hiernach verwandelt sich die zuletzt erhaltene Gleichung in

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Diese nämliche Gleichung gilt also sowohl, wenn der Winkel A spitz, als auch wenn derselbe stumpf ist.

Sie bleibt endlich drittens auch noch richtig, wenn der Winkel A ein rechter ist; sie geht nämlich in diesem Falle, da $\cos A = \cos 90^0 = 0$ ist, einfach in die Gleichung des pythagoräischen Lehrsatzes über

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

*B. Analytischer Beweis. Nach §. 53 und 54 ist

$$a \sin B = b \sin A$$

und $$a \cos B = c - b \cos A,$$

folglich wenn wir quadriren,

$$a^2 \sin B^2 = b^2 \sin A^2$$

und $$a^2 \cos B^2 = c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos A^2.$$

Addiren wir diese Gleichungen und ziehen die Glieder, welche einen gleichen Factor haben, zusammen, so erhalten wir weiter:

$$a^2 (\sin B^2 + \cos B^2) = b^2 (\sin A^2 + \cos A^2) + c^2 - 2bc \cos A,$$

oder da bekanntlich $\sin B^2 + \cos B^2 = 1$ und eben so $\sin A^2 + \cos A^2 = 1$ ist, $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Zufolge der so eben erwiesenen wichtigen Gleichung, von welcher der pythagoräische Satz der Planimetrie nur ein spezieller Fall ist, ist das Quadrat einer Dreiecksseite, welche einem spitzen Winkel gegenüberliegt, allemal kleiner, dagegen in einem stumpfwinkligen Dreiecke das Quadrat der Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenüberliegt, größer als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten; denn wenn Winkel A stumpf ist, so ist cos A negativ, folglich das Glied $- 2bc \cos A$ positiv.

Diese Gleichung liefert uns auch den sehr einfachen Beweis für den bereits in der Planimetrie (§. 227) aufgeführten Satz: In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten. Bezeichnen wir nämlich in dem Parallelogramm ABCD, Fig. 49, die Diagonalen mit d und c und die Seiten mit a und b, so ist in dem Dreiecke ABD

$$1)\; d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A$$

und in dem Dreiecke ABC $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B,$

oder da

$\cos B = - \cos A$, also $- \cos B = + \cos A$ ist, $\;2)\; c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos A.$

Aus der Addition der Gleichung (1) und (2) ergibt sich

$$3)\; d^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

§. 63. Aufgabe.

Wenn von einem Dreiecke zwei Seiten b und c und der eingeschlossene Winkel A gegeben sind, die dritte Seite a zu berechnen.

Auflösung. Nach dem vorhergehenden §. ist

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

folglich

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}.$$

Erstes Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei $b = 7$, $c = 10$, $A = 70^0$; dann ist

$$a = \sqrt{49 + 100 - 140 \,.\, 0{,}3420} = \sqrt{149 - 47{,}8800}$$
$$= \sqrt{101{,}12} = 10{,}05.$$

Zweites Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei $b = 4$, $c = 6$, $A = 124^0$. Da hier der Winkel A stumpf ist, so bedienen wir uns bequemer der Formel

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha},$$

$$a = \sqrt{16 + 36 + 48 \,.\, 0{,}5592} = \sqrt{52 + 26{,}8416}$$
$$= \sqrt{78{,}8416} = 8{,}88.$$

Wir fügen keine Beispiele mit Logarithmen bei, da die obige Formel für das logarithmische Rechnen offenbar unbequem ist, und wir weiter unten für diesen Zweck ganz geeignete Formeln entwickeln werden. Wir bemerken jedoch noch für Leser, welche sich viel mit trigonometrischen Rechnungen zu beschäftigen haben, daß jene Formel gerade dann wieder die meiste Bequemlichkeit gewährt, wenn die Seiten b und c nicht unmittelbar, sondern ihre Logarithmen, was bei trigonometrischen Rechnungen nicht selten der Fall ist, gegeben sein sollten, besonders wenn man dieser Gleichung folgende Form gibt:

$$a = c\sqrt{1 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 - 2 \,.\, \frac{b}{c} \,.\, \cos A.}$$

Durch die Gleichung des §. 62 werden wir auch in den Stand gesetzt, die vierte Aufgabe (drei Seiten) zu lösen, wie dies der folgende §. zeigt.

§. 64. Aufgabe.

Wenn von einem Dreiecke ABC, Fig. 19, die drei Seiten gegeben sind, die Winkel des Dreiecks zu berechnen.

Auflösung. Wie wir in §. 62 gesehen haben, ist

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich leicht weiter:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Die vorstehenden Gleichungen lassen sich in Worten also aussprechen: Der Cosinus eines Winkels im Dreiecke wird erhalten, wenn man von der Summe der Quadrate der einschließenden Seiten das Quadrat der gegenüberliegenden Seite subtrahirt und die erhaltene Differenz durch das doppelte Product der einschließenden Seiten dividirt.

Beispiel ohne Logarithmen.

Es sei $a = 6$, $b = 8$, $c = 13$; dann ist

$$\cos A = \frac{64 + 169 - 36}{208} = \frac{197}{208} = 0{,}9471,$$

folglich
$$A = 18^0\, 40'$$

$$\cos B = \frac{36 + 169 - 64}{156} = \frac{141}{156} = 0{,}9038,$$

folglich
$$B = 25^0\, 20'$$

$$\cos C = \frac{36 + 64 - 169}{96} = \frac{-69}{96} = -0{,}7187.$$

Da hiernach cos C negativ ist, so ist Winkel C stumpf und folglich sein Cosinus gleich dem negativen Cosinus des spitzen Nebenwinkels. Nun ist $+ 0{,}7187$ der Cosinus von 44^0, also $C = 180^0 - 44^0 = 136^0$.
Wir hätten auch nach Berechnung des Winkels A den Winkel B nach dem Sinussatze berechnen und dann, um C zu finden, die Summe $A + B$ von 180^0 subtrahiren können. Das angewendete Verfahren aber liefert uns eine leichte Probe für die Richtigkeit unserer Rechnung, da die Summe $A + B + C = 180^0$ ist.

Wir fügen keine Beispiele mit Logarithmen bei, da die obige Gleichung für diesen Zweck unbequem ist, und wir weiter unten (§. 68) für das logarithmische Rechnen ganz geeignete Formeln kennen lernen werden.

Bemerkung.

Die vorhergehenden Entwickelungen haben uns in den Stand gesetzt, das Dreieck in allen vier Fällen aufzulösen. Wir haben jedoch nur für die Auflösung der ersten und zweiten Aufgabe (§§. 56 und 57) solche Gleichungen erhalten, bei denen sich die Logarithmen bequem anwenden lassen. Dagegen sind die Formeln, welche die Auflösung der dritten und vierten Aufgabe liefern (§§. 60, 63 und 64), für den practischen Gebrauch der Logarithmen unbequem. Die nächstfolgenden Sätze werden uns mit solchen Gleichungen bekannt machen, welche die Auflösung der beiden letzten Aufgaben in Formeln ausdrücken, welche für das logarithmische Rechnen ganz geeignet sind.

§. 65. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke verhalten sich die Summe und die Differenz zweier Seiten wie die Tangenten der halben Summe und der halben Differenz der gegenüberliegenden Winkel, also wenn wir die halbe Summe der den Seiten a und b gegenüberliegenden Winkel $\frac{A + B}{2}$ mit σ und die halbe Differenz derselben $\frac{A - B}{2}$ mit ϑ bezeichnen,

$$a + b : a - b = \operatorname{tang} \sigma : \operatorname{tang} \vartheta.$$

A. Synthetischer Beweis. Wenn wir mit der kleineren Seite $AC = b$, Fig. 20, um die Spitze C einen Kreis beschreiben, welcher die größere Seite $BC = a$ in D und ihre Verlängerung in F schneidet, ferner A mit F und D verbinden und durch B mit AD eine Parallele ziehen, welche die verlängerte AF in G trifft, so ist zunächst Winkel FAD, als Winkel im Halbkreise, ein rechter, folglich auch Winkel $G = 90^0$; ferner ist Centriwinkel ACF, als Außenwinkel des Dreiecks ABC, $= A + B$, daher der mit ihm auf dem nämlichen Bogen AF stehende Peripheriewinkel $ADC = \frac{A + B}{2} = \sigma$,

also auch FBG $= \sigma$. Wenn wir endlich noch den Punkt E, in welchem der um C beschriebene Kreis die Grundlinie AB zum zweitenmale schneidet, mit C verbinden, so ist Winkel A (BAC) = AEC = B + ECB, also Centriwinkel ECB = A — B und folglich der mit ihm auf dem nämlichen Bogen DE stehende Peripheriewinkel DAE $= \frac{A - B}{2} = \vartheta$, daher auch ABG $= \vartheta$.

Nun ist in den rechtwinkligen Dreiecken AGB und FGB

$$\tang \vartheta = \frac{AG}{BG} \text{ und } \tang \sigma = \frac{FG}{BG},$$

folglich, da sich Brüche mit gleichem Nenner wie ihre Zähler verhalten,

$$\tang \vartheta : \tang \sigma = AG : FG.$$

Da AD ‖ BG ist, so verhält sich

$$AG : FG = BD : BF,$$

also auch

$$\tang \vartheta : \tang \sigma = BD : BF.$$

Zufolge der Construction ist BD = BC — AC = a — b und BF = BC + AC = a + b. Setzen wir diese Werthe in die zuletzt erhaltene Proportion ein, so verwandelt sich dieselbe in:

$$\tang \vartheta : \tang \sigma = a - b : a + b.$$

*B. Analytischer Beweis. Nach §. 53 verhält sich

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b},$$

folglich auch

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{a - b}{a + b}.$$

Da wir

$$\frac{A + B}{2} = \sigma \text{ und } \frac{A - B}{2} = \vartheta$$

gesetzt haben, so ist $A = \sigma + \vartheta$ und $B = \sigma - \vartheta$,

folglich nach §. 33 $\sin A - \sin B = 2 \cos \sigma \sin \vartheta$

und $\sin A + \sin B = 2 \sin \sigma \cos \vartheta$.

Setzen wir diese Werthe in die obige Gleichung ein, so erhalten wir

$$\frac{2 \cos \sigma \sin \vartheta}{2 \sin \sigma \cos \vartheta} = \frac{a - b}{a + b}.$$

Bekanntlich ist $\frac{\cos \sigma}{\sin \sigma} = \cotg \sigma$ und $\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \tang \vartheta$; hiernach verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in:

$$\cotg \sigma \,.\, \tang \vartheta = \frac{a - b}{a + b},$$

oder da wir statt mit cotg σ zu multipliciren, auch durch tang σ dividiren können

$$\frac{\tang \vartheta}{\tang \sigma} = \frac{a - b}{a + b}.$$

§. 66. Zusatz.

Die Gleichung des vorhergehenden §., $\tang \vartheta : \tang \sigma = a - b : a + b$, welcher man auch den Namen des Tangentensatzes beizulegen pflegt, gibt uns ein bei Anwendung der Logarithmen bequemes Mittel, wenn von einem Dreiecke zwei Seiten a und b und der eingeschlossene Winkel C gegeben sind, die fehlenden Winkel A und B zu berechnen. Da nämlich der Winkel C gegeben ist, so ist auch die Summe der beiden andern Winkel

$A + B = 180^0 - C$ und also auch ihre halbe Summe, welche wir mit σ bezeichnen, bekannt, nämlich

$$1)\quad \sigma = \frac{180^0 - C}{2}.$$

Wir finden nun die halbe Differenz der fehlenden Winkel, welche wir mit ϑ bezeichnen, durch die Gleichung

$$2)\quad \tang \vartheta = \frac{(a - b) \tang \sigma}{a + b}.*)$$

Ist aber hieraus ϑ gefunden, so ist, (wie Fig. 20 deutlich zeigt),

$$3)\quad A = \sigma + \vartheta \text{ und } B = \sigma - \vartheta.$$

Hat man auf diese Art die Winkel A und B berechnet, so kann man auch die fehlende Seite c leicht nach dem Sinussatze finden durch die Gleichung

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} \text{ oder } c = \frac{b \sin C}{\sin B}.$$

Beispiel mit Logarithmen.

Es sei $a = 618{,}3$, $b = 504{,}6$, $C = 100^0\,28'$; dann ist $a + b = 1122{,}9$, wofür wir, da unsere Tafeln nur vier Ziffern enthalten, abgekürzt 1123 setzen**), ferner $a - b = 113{,}7$ und $\sigma = 39^0\,46'$. Wir finden nun ϑ durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \log (a - b) &= 2{,}05576 \\ + \log \tang \sigma &= 9{,}92022 - 10 \\ &\overline{11{,}97598 - 10} \\ - \log (a + b) &= 3{,}05038 \\ &\overline{8{,}92560 - 10} \\ \vartheta &= 4^0\,49'. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A &= \sigma + \vartheta = 44^0\,35' \\ B &= \sigma - \vartheta = 34^0\,57' \\ c &= 866{,}3 \end{aligned}$$

Für solche Leser, welche sich viel mit trigonometrischen Rechnungen zu beschäftigen haben, bemerken wir noch Folgendes:

Um aus zwei Seiten a und b und dem eingeschlossenen Winkel C die fehlende Seite c durch die möglich kürzeste Rechnung zu erhalten, kann man in nachstehender Art verfahren. Wenn wir in Fig. 20 die gesuchte Seite AB mit c, ferner AG mit u, BG mit v bezeichnen und uns durch D mit AG eine Parallele gezogen denken, welche BG im Punkte K durchschneidet, so ist auch DK = u, folglich in den rechtwinkligen Dreiecken DKB und FGB

$$u = (a - b) \sin \sigma \text{ und } v = (a + b) \cos \sigma.$$

Ferner in dem rechtwinkligen Dreiecke ABG

$$\tang \vartheta = \frac{u}{v} \text{ und } c = \frac{v}{\cos \vartheta}.$$

Hiernach ist für das obige Beispiel die Rechnung folgende:

$$\begin{aligned} \log (a - b) &= 2{,}05576 \\ + \log \sin \sigma &= 9{,}80595 - 10 \\ \log u &= 11{,}86171 - 10 \\ - \log v &= 2{,}93611 \\ &\overline{8{,}92560 - 10} \\ \vartheta &= 4^0\,49' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log (a + b) &= 3{,}05038 \\ + \log \cos \sigma &= 9{,}88573 - 10 \\ \log v &= 12{,}93611 - 10 \\ - \log \cos \vartheta &= 9{,}99846 - 10 \\ \log c &= \overline{2{,}93765} \\ c &= 866{,}3. \end{aligned}$$

---

*) Man lese: tang ϑ verhält sich zu a — b wie tang σ zu a + b.

**) Wenn es sich darum handelte, den möglich größten Grad der Genauigkeit, welche die Tafeln gestatten, zu erreichen, so würde man sich auch einer leicht auszuführenden Interpolation bedienen können, was wir hier jedoch als unwesentlich übergehen, zumal volle Genauigkeit doch überhaupt nicht zu erreichen ist.

Bemerkung.

Wir haben nun noch eine für das logarithmische Rechnen bequeme Formel für die Aufgabe aufzusuchen, wenn von einem Dreiecke alle drei Seiten gegeben sind und die Winkel berechnet werden sollen. Wir werden die Auflösung dieser Aufgabe in einer sehr einfachen Weise gewinnen, wenn wir derselben den folgenden Satz vorausschicken*).

§. 67. Lehrsatz.

Wenn wir den halben Umfang eines Dreiecks, dessen Seiten a, b und c sind, mit p bezeichnen, so ist der Radius des in das Dreieck beschriebenen Kreises

$$\rho = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Beweis. Berührt der in das Dreieck ABC, Fig. 28, beschriebene Kreis die Seiten desselben in den Punkten D, E, F, so ist nach einem bekannten Satze der Planimetrie (§. 130)

$$AD = AF,$$
$$BE = BD$$
und
$$CE = CF,$$
folglich
$$AD + BE + CE = p$$
und
$$AF = AD = p - (BE + CE) = p - a.$$
Eben so ist
$$BD = BE = p - b$$
und
$$CE = CF = p - c.$$

Da die Winkel A, B, C des Dreiecks ABC durch die Linien AM, BM, CM (nach §. 130 der Planim.) halbirt sind, so ist ferner in den entstandenen rechtwinkligen Dreiecken ADM, BDM und CEM

$$p - a = \rho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A,$$
$$p - b = \rho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}B$$
und
$$p - c = \rho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C.$$

Addiren wir diese Gleichungen, und erwägen wir zugleich, daß

$(p - a) + (p - b) + (p - c) = 3p - (a + b + c) = 3p - 2p = p$

ist, so erhalten wir

$$1)\quad p = \rho (\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}B + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C).$$

Multipliciren wir jene Gleichungen, so bekommen wir

$$2)\quad (p-a)(p-b)(p-c) = \rho^3 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}B \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C.$$

Da $\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C = 90^0$ ist, so ist nach §. 32

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}B + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}B \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C.$$

Dividiren wir daher Gleichung (2) durch (1), so ergibt sich

$$3)\quad \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = \rho^2$$

und folglich 4)
$$\rho = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

---

*) Dieser Satz gehört eigentlich in das folgende von Kreisrechnungen handelnde Capitel, also nicht hierher; daß wir denselben dennoch hier einschalten, hat darin seinen Grund, daß die Logarithmentafel ein nur dem praktischen Bedürfnisse, nicht aber der Systematik Folge leistender Rechenknecht ist.

§. 68, a. Zusatz.

Wenn wir die Bezeichnung des vorherg. §. beibehalten, so ist

$$\cotg \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}.$$

Beweis. In dem rechtwinkligen Dreiecke ADM, Fig. 28, ist

$$\cotg \tfrac{1}{2}A = \frac{AD}{DM} = \frac{p-a}{\rho}.$$

Setzen wir den im vorherg. §. für ρ erhaltenen Werth ein, (indem wir statt durch ρ zu dividiren mit der Reciproke von ρ multipliciren), so erhalten wir

$$1)\quad \cotg \tfrac{1}{2}A = (p-a)\sqrt{\frac{p}{(p-a)p-b)(p-c)}};$$

und wenn wir den vor dem Wurzelzeichen stehenden Factor $p-a$ unter dasselbe bringen, (indem wir $p-a = \sqrt{(p-a)^2}$ setzen), so ergibt sich

$$2)\quad \cotg \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}.$$

Die so eben erhaltene Gleichung kann auch auf die folgende Art abgeleitet werden, welche uns noch mit andern für die logarithmische Berechnung eines Winkels aus den drei Seiten mehr oder weniger geeigneten Formeln bekannt machen wird.

Nach §. 29, b ist $\quad 2\cos \tfrac{1}{2}A^2 = 1 + \cos A,$

und nach §. 64 ist $\quad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$

folglich $\quad 2\cos \tfrac{1}{2}A^2 = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a).(b+c-a)}{2bc}$$

(vermöge der bekannten Formel $u^2 - v^2 = (u+v).(u-v)$). — Ersetzen wir $b+c+a$ durch $2p$ und $b+c-a$ durch $2p-2a = 2(p-a)$, so verwandelt sich die zuletzt erhaltene Gleichung in

$$2\cos \tfrac{1}{2}A^2 = \frac{4p(p-a)}{2bc},$$

woraus sich $\quad 1)\quad \cos \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

ergibt. — Weiter ist nach §. 29, b

$$2\sin \tfrac{1}{2}A^2 = 1 - \cos A,$$

also wenn wir wieder cos A nach §. 64 ausdrücken,

$$2\sin \tfrac{1}{2}A^2 = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2-(b^2+c^2-2bc)}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc},$$

wofür wir nach der bekannten Formel $u^2 - v^2 = (u+v).(u+v)$ auch setzen können,

$$2\sin \tfrac{1}{2}A^2 = \frac{(a+b-c).(a-(b-c))}{2bc} = \frac{(a+b-c).(a+c-b)}{2bc}.$$

Nach der Annahme ist $a+b+c = 2p$, folglich $a+b-c = 2p-2c = 2(p-c)$ und $a+c-b = 2p-2b = 2(p-b)$. Setzen wir diese Werthe in die letzte Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$2 \sin \tfrac{1}{2}A^2 = \frac{4(p-b)(p-c)}{2bc},$$

also $\quad$ 2) $\sin \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$

Dividiren wir die Gleichung (1) durch (2), so erhalten wir die Gleichung des Haupttextes

$$3)\quad \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)\,.\,(p-c)}}.$$

Zufolge §. 29, a ist $\quad \sin A = 2 \sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}A;$

setzen wir in diese Gleichung die unter (1) und (2) gefundenen Werthen ein, so bekommen wir endlich noch

$$4)\quad \sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Die unter (1), (2) und (4) neu gewonnenen Formeln stehen jedoch an praktischer Brauchbarkeit der unter (3) aufgeführten Formel nach. Die wenigste Bequemlichkeit für die Rechnung gewährt die Formel (4), da sie das Aufschlagen der meisten Logarithmen erfordert; überdies bleibt es nach derselben unentschieden, ob der Winkel A, wenn er der größten Seite gegenüberliegt, spitz oder stumpf ist. Die Formel (1) gewährt, wenn der Winkel $\tfrac{1}{2}A$ klein ist, und die Formel (2), wenn derselben sich einem Rechten nähert, nur einen geringen Grad von Genauigkeit, da im ersteren Falle der Cosinus, im andern der Sinus sich nur langsam ändert, während die Aenderungen der Tangente und folglich auch der Cotangente allemal beträchtlich und größer als die gleichzeitigen Aenderungen des Sinus und des Cosinus sind.

§. 68, b. Zusatz.

So wie wir im vorherg. §. die Gleichung

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}},$$

welcher wir den Namen der Cotangentenformel beilegen, erwiesen haben, so lassen sich auch die Gleichungen

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}}$$

und $\quad \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}$

als richtig darthun. Nach diesen Gleichungen können die Winkel eines Dreiecks, dessen Seiten gegeben sind, bequem mit Hilfe der Logarithmentafel berechnet werden.

Es sei z. B. gegeben a = 819, b = 516, c = 925; dann ist

$$p = 1130,\ p-a = 311,\ p-b = 614,\ p-c = 205.$$

Wir erhalten nun zunächst den Winkel A durch die folgende Rechnung:

log p	= 3,05308	log (p — b)	= 2,78817
log (p — a)	= 2,49276	log (p — c)	= 2,31175
	5,54584		5,09992
	5,09992		
	2) 0,44592		
log cotg ½A	= 0,22296		

$\frac{1}{2}A = 30^0\ 54'$, $A = 61^0\ 48'$

Eben so ergibt sich $B = 33^0\ 44'$

und $C = 84^0\ 28'$.

Wenn die Aufgabe nicht bloß dahin gestellt ist, einen Winkel des Dreiecks zu finden, sondern wenn alle drei Winkel berechnet werden sollen, so gewinnt man noch an Bequemlichkeit, wenn man sich bei der Berechnung des Winkels A der in §. 68, a unter (1) aufgeführten Formel

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A = (p - a)\sqrt{\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

bedient und bei der Berechnung der Winkel B und C die dieser analogen Formeln

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}B = (p - b)\sqrt{\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

und $$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C = (p - c)\sqrt{\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

anwendet, (in denen zufolge §. 67 der Wurzelausdruck die Reciproke von ρ ist).

Bemerkung.

Während wir im Vorhergehenden gesehen haben, wie aus drei gegebenen Stücken, Seiten oder Winkeln, welche das Dreieck bestimmen, die fehlenden Winkel oder Seiten gefunden werden, fügen wir nun noch hinzu, wie sich aus jenen Stücken der Inhalt des Dreiecks berechnen läßt.

§. 69. Lehrsatz.

Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Producte zweier Seiten, multiplicirt mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels, in Zeichen

$$J = \tfrac{1}{2}bc \sin A.$$

Beweis. Bezeichnen wir die Höhe CD des Dreiecks ABC, Fig. 15, 16 und 17, mit h, so ist bekanntlich

$$J = \tfrac{1}{2}c \cdot h.$$

Weiter ist aber, es mag nun A ein spitzer, stumpfer oder rechter Winkel sein, (wie wir in §. 53 ausführlich gezeigt haben), allemal

$$h = b \sin A,$$

folglich $$J = \tfrac{1}{2}c \cdot b \cdot \sin A = \tfrac{1}{2}bc \sin A.$$

Wir fügen für diese und die folgende Aufgabe kein Beispiel in bestimmten Zahlen bei, weil die Ausrechnung nicht die mindeste Schwierigkeit darbietet, auch diese beiden Aufgaben in praktischer Hinsicht eine geringere Wichtigkeit als die dritte besitzen.

§. 70. Zusatz.

Sind b und c zwei zusammenstoßende Seiten eines Parallelogramms und ist A der von denselben eingeschlossene Winkel, so ist der Inhalt desselben

$$J = bc \sin A.$$

Ist das Parallelogramm ein Rechteck, also $A = 90^0$ und folglich $\sin A = 1$, so verwandelt sich diese Gleichung in die bekannte Formel für den Inhalt des Rechtecks

$$J = b \cdot c.$$

Denken wir uns zwei Dreiecke, welche einen gleichen Winkel A haben, und bezeichnen wir die diesen Winkel einschließenden Seiten für das eine

Dreieck mit b und c, für das andere mit b' und c', ferner den Inhalt des ersten mit J, des anderen mit J', so ist

$$J = \frac{1}{2} bc \sin A \text{ und } J' = \frac{1}{2} b'c' \sin A,$$

folglich
$$J : J' = bc : b'c'.$$

Diese Formel spricht den bekannten geometrischen Satz aus: Wenn zwei Dreiecke einen gleichen Winkel haben, so verhalten sich ihre Inhalte wie die Producte der einschließenden Seiten. (Planim. §. 212).

Da der Sinus des stumpfen Winkels gleich dem Sinus des spitzen Nebenwinkels ist, so folgt aus der Formel des vorherg. §. auch noch der Satz, daß zwei Dreiecke gleichen Inhalt haben, wenn sie in zwei Seiten übereinstimmen und die eingeschlossenen Winkel sich zu einem Flachen ergänzen.

Lassen wir von den folgenden Stücken: zwei Seiten b, c und der eingeschlossene Winkel A, eine Seite b wachsen, während c und A ungeändert bleiben, so nimmt zufolge der obigen Formel unbedingt auch der Inhalt des Dreiecks zu. Lassen wir dagegen den Winkel A wachsen, ohne die Größe der Seiten b und c zu ändern, so wächst der Inhalt nur so lange, bis der Winkel A gleich einem rechten wird; von da ab nimmt derselbe eben so wieder ab, wie er vorher gewachsen ist.

§. 71. Aufgabe.

Den Inhalt J eines Dreiecks zu berechnen, wenn eine Seite desselben a und zwei Winkel A und B, (also auch der dritte C) gegeben sind.

Auflösung.
$$J = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \sin A}.$$

Beweis. Wenn wir in der bekannten Gleichung

$$J = \frac{h \cdot c}{2}$$

$$h = a \sin B \text{ und } c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

setzen, so verwandelt sich dieselbe in

$$J = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

§. 72. Zusatz.

Bezeichnen wir zwei gleichliegende Seiten zweier Dreiecke, welche einander ähnlich sind und daher in den Winkeln A, B und C übereinstimmen, mit a und a', ihre Inhalte mit J und J', so ist

$$J = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} \text{ und } J' = \frac{a'^2 \sin B \sin C}{2 \sin A},$$

folglich
$$J : J' = a^2 : a'^2,$$

d. h. die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten. Die Trigonometrie liefert uns also einen sehr einfachen Beweis dieses wichtigen Satzes der Planimetrie (§. 213).

§. 73. Aufgabe.

Den Inhalt eines Dreiecks zu berechnen, wenn die drei Seiten a, b und c gegeben sind.

Auflösung. $J = \sqrt{p (p - a) (p - b) (p - c)}$,

wo wir der Kürze wegen den halben Umfang des Dreiecks mit p bezeichnet haben.

Beweis. Wenn wir in das Dreieck ABC, Fig. 28, einen Kreis beschreiben und den Mittelpunkt M mit den Ecken des Dreiecks verbinden, so wird dasselbe in drei Dreiecke AMB, BMC und CMA zerschnitten. Bezeichnen wir den Radius des in das Dreieck beschriebenen Kreises mit ρ, so sind die Inhalte dieser Dreiecke gleich

$$\tfrac{1}{2}c\rho,\ \tfrac{1}{2}a\rho \text{ und } \tfrac{1}{2}b\rho,$$

und folglich ist der Inhalt des ganzen Dreiecks

$$J = \tfrac{1}{2}(a + b + c)\,\rho = p\rho.$$

In §. 67 fanden wir $\rho = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

Setzen wir diesen Werth in die vorhergehende Gleichung ein, (und bringen wir zugleich den Factor p unter das Wurzelzeichen, indem wir $p = \sqrt{p^2}$ setzen), so ergibt sich $J = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Es sei gegeben	$a = 739,$		
	$b = 648,$		
und	$c = 572;$		
dann ist	$2p = 1959,$		
folglich	$p = 979{,}5$	$\log p =$	2,99100
	$p - a = 240{,}5$	$\log (p-a) =$	2,38112
	$p - b = 331{,}5$	$\log (p-b) =$	2,52048
	$p - c = 407{,}5$	$\log (p-c) =$	2,61013
		2 |	10,50273
			5,25136

$$J = 178400.$$

$$J = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Die obige Formel kann auch erhalten werden, wenn man die in §. 69 und 68, a aufgeführten Gleichungen $J = \tfrac{1}{2}bc \sin A$

und $$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

mit einander multiplicirt. Endlich ist klar, daß es auch möglich sein muß, diese Formel, da in derselben keine Winkel vorkommen, auf rein algebraischem Wege abzuleiten, wie dies in §. 269 der Planimetrie gezeigt ist.

Wenn wir in der obigen Formel statt p seinen Werth $\tfrac{1}{2}(a + b + c)$ einsetzen, so verwandelt sich dieselbe in

$$J = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b+c) \cdot \tfrac{1}{2}(a+b-c) \cdot \tfrac{1}{2}(a-b+c) \cdot \tfrac{1}{2}(-a+b+c)}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-(a-b))}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2)}.$$

Der zuletzt erhaltene Ausdruck stellt uns, wenn wir der Kürze wegen c als die Grundlinie, a und b als die Seiten des Dreiecks bezeichnen, recht klar vor Augen, daß in jedem Dreiecke die Grundlinie kleiner als die Summe, aber größer als die Differenz der Seiten ist. Denken wir uns, daß von einem Dreiecke die Grundlinie und die Seitensumme $a + b$ gegeben, die Größe der Seiten a und b selbst aber unbestimmt gelassen ist, so ist der erste Factor $(a + b)^2 - c^2$ constant; der andere Factor $c^2 - (a - b)^2$ aber und eben so der Inhalt des Dreiecks wird um so größer, je kleiner die Differenz der Seiten $a - b$ ist, und am größten, wenn diese Differenz verschwindet. Es ergibt sich hieraus der Satz, daß von allen Dreiecken, welche in der Grundlinie und

der Summe der Seiten übereinstimmen, das gleichschenklige den größten Inhalt hat, woraus dann leicht geschlossen werden kann, daß von allen Dreiecken mit gleichem Umfange dem gleichseitigen der größte Inhalt zukommt.

§. 74. Aufgabe.

Den Inhalt eines Dreiecks ABC, Fig. 19, zu berechnen, wenn zwei Seiten a und b und der der einen gegenüberliegende Winkel A gegeben sind.

Auflösung. Man suche zunächst nach §. 57 den Winkel B durch die Gleichung 1) $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$;

dann ist 2) $C = 180^0 - (A + B)$

und nach §. 69 der gesuchte Inhalt 3) $J = \frac{1}{2} ab \sin C$.

Da die Gleichung (1) zwei Werthe für den Winkel B ergeben kann, so erhält in diesem Falle natürlich auch J zwei verschiedene Werthe. (S. oben §. 58.)

D. Trigonometrische Kreisrechnungen.

§. 75. Aufgabe.

Die Sehne a eines Kreises zu berechnen, wenn der Radius r und der Bogen α gegeben sind.

Auflösung. $a = 2r \sin \frac{1}{2}\alpha$.

Beweis. 1) Wenn wir die Endpunkte der Sehne AB, Fig. 23, mit dem Mittelpunkte C verbinden und das Lot CD ziehen, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ADC $AD = AC \sin ACD$,
oder da $AD = \frac{1}{2}a$, $AC = r$, $ACD = \frac{1}{2}\alpha$ ist,

$$\frac{1}{2}a = r \sin \frac{1}{2}\alpha, \text{ also } a = 2r \sin \frac{1}{2}\alpha.$$

Beweis. 2) Wenn wir den Durchmesser AE ziehen und B mit E verbinden, so ist Winkel ABE, als Winkel im Halbkreise, ein rechter und der Peripheriewinkel $AEB = \frac{1}{2}\alpha$, folglich in dem rechtwinkligen Dreiecke ABE

$$a = AB = AE \sin AEB = 2r \sin \frac{1}{2}\alpha.$$

§. 76. Zusatz.

Die so eben erwiesene Gleichung lautet in Worten ausgesprochen:

Die Sehne ist gleich dem Durchmesser multiplicirt mit dem Sinus des zugehörigen Peripheriewinkels, wobei es gleichgiltig ist, ob der Peripheriewinkel in den größeren oder kleineren Abschnitt gezeichnet ist. Denn da in jedem Vierecke im Kreise zwei gegenüberliegende Winkel E und F, Fig. 23, sich zu einem Flachen ergänzen, so ist $\sin E = \sin F$; wir können daher eben sowohl setzen:

$$AB = 2r \sin E \text{ als auch } AB = 2r \sin F.$$

§. 77. Zusatz.

Wenn wir um das Dreieck ABC, Fig. 24, einen Kreis beschreiben und den Durchmesser desselben mit 2r bezeichnen, so ist zufolge des vorhergehenden §.

$$a = 2r \sin A, \; b = 2r \sin B, \; c = 2r \sin C,$$

folglich $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r.$$

Schon aus §. 53 folgt, daß jede Seite eines Dreiecks durch den Sinus des gegenüberliegenden Winkels dividirt, den nämlichen Quotienten

gibt. Wir erfahren jetzt, daß dieser beständige Quotient dem Durchmesser des unbeschriebenen Kreises gleich ist.

§. 78. Aufgabe.

Die Länge des Bogens von einem Grade eines Parallelkreises der Erde zu berechnen, wenn die Breite dieses Parallelkreises $= \alpha$ gegeben ist und die Erde als eine vollkommene Kugel angenommen wird.

Auflösung. Bekanntlich mißt ein Grad auf dem Aequator der Erde 15 geographische Meilen, (indem man nämlich unter einer geographischen Meile den fünfzehnten Theil eines Grades des Aequators versteht). Ist nun AB, Fig. 25, der Durchmesser des Aequators, DE der Durchmesser des Parallelkreises, NS die Erdaxe und DCA $= \alpha$, so ist

$$\frac{DF}{DC} = \cos CDF = \cos \alpha, \text{ also auch } \frac{DE}{AB} = \cos \alpha.$$

Da sich nun die Peripherien zweier Kreise und folglich auch ähnliche Bogen wie die Durchmesser der Kreise verhalten, so ist, wenn wir die Länge eines Grades auf dem Aequator mit a, auf dem Parallelkreise mit b bezeichnen,

auch $$\frac{b}{a} = \cos \alpha, \text{ also } b = a \cos \alpha,$$

oder wenn wir a = 15 setzen, $b = 15 . \cos \alpha$.

Ist z. B. $\alpha = 51^0 30'$, so ist $b = 15 . \cos \alpha = 15 . 0{,}6225 = 9{,}3375$. Es mißt also in der Breite von $51^1/_2{}^0$ ein Grad des Parallelkreises ohngefähr $9^1/_3$ Meile.

§. 79. Aufgabe.

Den Inhalt eines Kreisabschnitts AFB, Fig. 23, zu berechnen, wenn der Radius des Kreises = r und, (in Graden ausgedrückt), der Bogen AB $= \alpha$ gegeben ist.

Auflösung. Wir werden den Kreisabschnitt erhalten, wenn wir zuerst den Inhalt des Kreisausschnitts ACBF, dann den Inhalt des Dreiecks ABC berechnen und letzteren von ersterem subtrahiren. Nach §. 223 der Planimetrie ist

$$\text{der Ausschnitt} = \frac{r^2\pi\alpha}{360^0}$$

und nach §. 69 der Trigonometrie ist

$$\text{das Dreieck} = \frac{AC . BC . \sin ACB}{2} = \frac{r^2 \sin \alpha}{2},$$

folglich $$\text{der Abschnitt} = \frac{r^2\pi\alpha}{360^0} - \frac{r^2 \sin \alpha}{2}.$$

Es sei $r = 83{,}7$ und $\alpha = 124^0 43'$; dann ist zunächst der Kreisausschnitt gleich

$$\frac{(83{,}7)^2 . \pi . 124^0 43'}{360^0} = \frac{(83{,}7)^2 . \pi . 7483'}{21600'}.$$

Wenden wir die Logarithmentafeln an, so ist

$$\begin{aligned} \log 83{,}7 &= 1{,}92273 \;(2 \\ &\; 3{,}84546 \\ + \log \pi &= 0{,}49715 \\ + \log 7483 &= 3{,}87408 \\ &\; 8{,}21669 \\ - \log 21600 &= 4{,}33445 \\ &\; 3{,}88224 \\ \text{Numerus} &= 7625. \end{aligned}$$

Ferner ist das Dreieck gleich

$$\frac{(83,7)^2 . \sin 124^0\, 43'}{2} = \frac{(83,7)^2 . \sin 55^0\, 17'}{2}.$$

Rechnen wir wieder mit Logarithmen, so ist zunächst zufolge der vorhergehenden Rechnung

$$\log (83,7)^2 = 3,84546$$

ferner $+ \log \sin 55^0\, 17' = 9,91486 - 10$

$$3,76032$$

$$- \log 2 = 0,30103$$

$$3,45929$$

Numerus = 2879.

Es war der Ausschnitt = 7625

und das Dreieck = 2879

folglich ist der Abschnitt = 4746.

Wenn bei einem Kreisabschnitte CEGF, Fig. 38, die Höhe EF, welche wir mit a bezeichnen wollen, im Verhältniß zur Breite CG, die wir b nennen, nur klein ist, so können wir näherungsweise den Inhalt des Abschnitts

$$J = {}^2/_3 ab$$

setzen. Der so erhaltene Ausdruck ist etwas zu klein; der Fehler beträgt jedoch weniger als $2\left(\frac{a}{b}\right)^2$. Ist z. B. $a = 3^m$ (3 Meter), $b = 36^m$ gegeben, so erhalten wir näherungsweise

$$J = 72^{\square m}.$$

Ist nun auch der wahre Inhalt etwas größer, so sind wir doch hinter demselben um weniger als $1^{\square m}$ zurückgeblieben. (Zu vergl. Kegelschnitte §. 59, Anm.)

*§. 80. Aufgabe.

Den Flächeninhalt der zweien sich schneidenden Kreisen gemeinschaftlichen Figur CEDF, Fig. 27, zu berechnen, wenn die Radien AC = r, BC = ρ und die Centrale AB = c gegeben sind.

Auflösung. Die Figur CEDF ist die Summe zweier Kreisabschnitte CED und CFD; um dieselben nach dem vorhergehenden §. ausdrücken zu können, bedürfen wir der Kenntniß der Winkel CAD und CBD, welche wir der Kürze wegen mit α und β bezeichnen wollen. Da diese Winkel durch die Linie AB halbirt sind, so berechnen wir die Winkel CAB = $^1/_2\alpha$ und CBA = $^1/_2\beta$ aus dem Dreiecke ABC, in welchem wir alle drei Seiten AB = c, AC = r und BC = ρ kennen, mit Hilfe der Gleichungen des §. 68. Sind aber α und β gefunden, so ist nach dem vorhergehenden §.

1) der Kreisabschnitt CED = $\frac{r^2\pi\alpha}{360} - \frac{r^2 \sin \alpha}{2}$ und

2) der Kreisabschnitt CFD = $\frac{\rho^2\pi\beta}{360} - \frac{\rho^2 \sin \beta}{2}$, folglich

3) die Figur CEDF = $\frac{(r^2\alpha + \rho^2\beta)\pi}{360} - \frac{r^2 \sin \alpha + \rho^2 \sin \beta}{2}$.

*§. 81. Zusatz.

Die Rechnungen des vorhergehenden §. erfahren bedeutende Abkürzungen, wenn die sich schneidenden Kreise einander gleich sind, also ρ = r und folglich auch $\beta = \alpha$ ist. Es ergibt sich dann zunächst der Winkel $^1/_2\alpha$ aus

dem rechtwinkligen Dreiecke AGC, in welchem wir die Hypotenuse AC = r und die Cathete AG = $^1/_2$ c kennen, durch die einfache Gleichung

$$1)\quad \cos {}^1/_2\,\alpha = \frac{AG}{AC} = \frac{c}{2r}.$$

Da ferner die zu berechnende Figur CEDF durch die Sehne CD halbirt, also doppelt so groß als der Kreisabschnitt CED ist, so erhalten wir aus der Gleichung (1) des vorhergehenden §.

$$2)\quad \text{Fig. CEDE} = \frac{r^2\pi\alpha}{180} - r^2 \sin \alpha.$$

Die Entwickelungen der beiden vorhergehenden §§. finden eine nützliche Anwendung, um bei partialen Sonnenfinsternissen den von der Mondscheibe nicht verdeckten, also sichtbar bleibenden Theil der Sonnenscheibe zu berechnen. Da die scheinbaren Durchmesser der Sonne und des Mondes nur wenig von einander verschieden sind, so werden wir, wenn nicht die äußerste Genauigkeit verlangt wird, dieselben als gleich annehmen und uns der einfacheren Formeln des letzten §. bedienen können. Zur Bestimmung der Größe der partialen Finsterniß wird in den Kalendern nicht der Abstand des Mittelpunkts der Sonne und des Mondes, als welche wir hier A und B annehmen, sondern die Größe des durch den Mond bedeckten Theiles des Sonnendurchmessers, also die Linie EF angegeben, wobei man den zwölften Theil des Sonnendurchmessers einen Zoll zu nennen und folglich den ganzen Sonnendurchmesser gleich 12 Zoll zu setzen pflegt. Bezeichnen wir die gegebene Linie EF mit a, so ist die Centrale AB oder

$$c = AE + BF - EF = 2r - a,$$

folglich nach Gleichung (1) $A)\ \cos {}^1/_2\,\alpha = \dfrac{2r - a}{2r}.$

Da ferner nach Gleichung (2) der durch den Mond verdeckte Theil der Sonnenscheibe

$$CEDF = \frac{r^2\pi\alpha}{180} - r^2 \sin \alpha$$

ist, so erhalten wir den sichtbar bleibenden Theil CHDFC, wenn wir diesen Ausdruck von dem ganzen Kreise $r^2\pi$ subtrahiren, also

$$CHDFC = \frac{r^2\pi\,(180 - \alpha)}{180} + r^2 \sin \alpha.$$

Dividiren wir diesen Ausdruck durch $r^2\pi$, und bezeichnen wir das Verhältniß des sichtbaren Theiles zur ganzen Sonnenscheibe mit q, so ergibt sich

$$B)\quad q = \frac{180 - \alpha}{180} + \frac{\sin \alpha}{\pi}.$$

Beträgt z. B. die Größe einer Finsterniß = 9,5 Zoll, so ist, wenn wir uns der am Ende dieses Buches befindlichen Tafel bedienen, welche uns hier größere Bequemlichkeit als die Logarithmentafel gewährt, nach Gleichung (A)

$\cos {}^1/_2\alpha = \dfrac{12 - 9{,}5}{12} = \dfrac{2{,}5}{12} = 0{,}2083$, folglich $^1/_2\alpha = 78^0$ und $\alpha = 156^0$.

Nun ist $\dfrac{180 - \alpha}{180} = \dfrac{24}{180} = 0{,}1333$

und $\dfrac{\sin \alpha}{\pi} = \dfrac{7}{22} \cdot 0{,}4067 = \underline{0{,}1294}$

folglich vermöge Gleichung (B) $q = 0{,}2627$

Es bleibt daher bei dieser Finsterniß etwas mehr als der vierte Theil der Sonnenscheibe sichtbar.

§. 82. Aufgabe.

Aus dem Umfange 2p eines regelmäßigen Vielecks von n Seiten den Radius r des umbeschriebenen, den Radius ρ des einbeschriebenen Kreises und den Inhalt J zu berechnen.

Auflösung. Wenn wir den Mittelpunkt C, Fig. 29, mit den Endpunkten einer Seite AB verbinden und aus C auf AB die Senkrechte CD ziehen, so ist $AC = BC = r$, $CD = \rho$, $AB = \frac{2p}{n}$, $AD = BD = \frac{p}{n}$, W. $ACB = \frac{360^0}{n}$, W. $ACD = BCD = \frac{180^0}{n}$. Wir erhalten daher aus dem rechtwinkligen Dreiecke ADC

$$1)\ r = \frac{AD}{\sin ACD} = \frac{p}{n \sin \frac{180^0}{n}} \qquad 2)\ \rho = AD \operatorname{cotg} ACD = \frac{p}{n} \cdot \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n}$$

und hieraus

$$3)\ J = p\rho = \frac{p^2}{n} \cdot \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n}.$$

Da $\operatorname{cotg} \frac{180^0}{n} = 1 : \operatorname{tang} \frac{180^0}{n}$ ist, und da ferner nach §. 17 der Sinus in schwächerem, die Tangente in stärkerem Verhältnisse als der Winkel zu- und abnimmt, so folgt aus diesen Gleichungen, daß bei gegebenem Umfange eines regelmäßigen Vielecks der Radius des umbeschriebenen Kreises um so kleiner, dagegen der Radius des einbeschriebenen Kreises und der Inhalt um so größer ausfällt, je größer die Zahl der Seiten des Vielecks ist.

§. 83. Zusatz.

Ist der Radius des Kreises = r gegeben und die Seite a des in denselben zu zeichnenden necks gesucht, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke ADC, Fig. 29, die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}a = r \sin \frac{180^0}{n}, \text{ also } a = 2r \sin \frac{180^0}{n}.$$

Wir sind daher im Stande, mit Leichtigkeit die Seiten eines jeden in einen Kreis zu beschreibenden regelmäßigen Vielecks durch trigonometrische Rechnung zu finden, während wir nur für eine beschränkte Zahl von regelmäßigen Vielecken die rein geometrische Construction auszuführen vermögen. (Vergl. oben §. 39.)

*§. 84, a. Aufgabe.

Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks ABC, Fig. 24, den Radius r des umbeschriebenen Kreises zu berechnen.

Auflösung. Nach §. 75 ist $r = \frac{a}{2 \sin A}$

und zufolge §. 69 ist $\sin A = \frac{2\,J}{bc}$,

wo wir uns den Inhalt J des Dreiecks ABC nach §. 73 durch die drei Seiten a, b, c ausgedrückt denken. Setzen wir den Werth von sin A aus der zweiten Gleichung in die erste ein, so ergibt sich

$$r = \frac{abc}{4J}.$$

*§. 84, b. Zusatz.

Die Aufgabe, aus den drei Seiten eines Dreiecks den Radius ρ des einbeschriebenen Kreises zu berechnen, ist schon oben (§. 67) gelöst worden.

Bereits an mehreren Stellen haben wir die Gleichung

$$J = p\rho,$$

in welcher p den halben Umfang des Dreiecks bezeichnet, aufgeführt. Setzen wir diesen Werth von J in die Gleichung des vorherg. §. ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$r = \frac{abc}{4p\rho} \text{ oder } abc = 4pr\rho = p \,.\, 2r \,.\, 2\rho.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der Satz: In jedem Dreiecke ist das Product der drei Seiten gleich dem halben Umfange multiplicirt mit dem Durchmesser des umbeschriebenen und dem Durchmesser des einbeschriebenen Kreises.

§. 85, a. Aufgabe.

Aus den Winkeln α, β, γ eines Dreiecks ABC, Fig. 23, und dem Radius r des umbeschriebenen Kreises den Umfang 2p und den Inhalt J zu berechnen.

Aufl. Nach §. 77 ist $a = 2r \sin\alpha$, $b = 2r \sin\beta$, $c = 2r \sin\gamma$.
Setzen wir diese Werthe in die Gleichungen

$$2p = a + b + c$$

und

$$J = {}^1/_2 bc \sin\alpha$$

ein, so verwandeln sich dieselben in

$$1)\quad 2p = 2r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$$

und

$$2)\quad J = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

Zufolge des in §. 37 verwiesenen Satzes fällt sowohl die Summe $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ als auch das Product $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ dann am größten aus, wenn $\alpha = \beta = \gamma$ ist. Es hat daher von allen in einen Kreis zu zeichnenden Dreiecken das gleichseitige den größten Umfang und den größten Inhalt.

§. 85, b. Aufgabe.

Aus den drei Winkeln α, β, γ eines Dreiecks ABC, Fig. 28, und dem Radius ρ des einbeschriebenen Kreises den Umfang 2p und den Inhalt J zu berechnen.

Aufl. Wie leicht zu sehen (und in §. 67 ausführlich gezeigt ist), ist

$$p = AD + BE + CF = \rho\,(\operatorname{cotg} {}^1/_2\alpha + \operatorname{cotg} {}^1/_2\beta + \operatorname{cotg} {}^1/_2\gamma).$$

Nach §. 32 können wir hierfür auch setzen:

$$1)\quad p = \rho \,.\, \operatorname{cotg} {}^1/_2\alpha \operatorname{cotg} {}^1/_2\beta \operatorname{cotg} {}^1/_2\gamma$$

und erhalten demgemäß weiter

$$2)\quad J = p\rho = \rho^2 \operatorname{cotg} {}^1/_2\alpha \operatorname{cotg} {}^1/_2\beta \operatorname{cotg} {}^1/_2\gamma.$$

Nach §. 37, Anm. wird als Product $\operatorname{tang} {}^1/_2\alpha \operatorname{tang} {}^1/_2\beta \operatorname{tang} {}^1/_2\gamma$ dann am größten, wenn $\alpha = \beta = \gamma$ ist, und da die Cotangente die Reciproke der Tangente ist, so fällt folglich in diesem Falle das Product $\operatorname{cotg} {}^1/_2\alpha \operatorname{cotg} {}^1/_2\beta \operatorname{cotg} {}^1/_2\gamma$ am kleinsten aus.

Von allen um einen Kreis zu zeichnenden Dreiecken hat daher das gleichseitige den kleinsten Umfang und Inhalt.

Anhang.

Vergleichung des Umfangs und Inhalts der Figuren.

Im Anschluß an die vorhergehenden Sätze soll im Folgenden gezeigt werden, daß bei gleichem Umfange das regelmäßige Vieleck einen größeren Inhalt hat als jedes unregelmäßige von gleicher Seitenzahl, und daß unter allen Figuren überhaupt der Kreis bei gleichem Umfange den größten Inhalt hat. Ehe wir jedoch hierzu übergehen können, haben wir noch den folgenden Satz zu erweisen.

1. Lehrsatz. Unter allen Vierecken, welche in ihren Seiten in der nämlichen Folge übereinstimmen, hat dasjenige, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, den größten Inhalt.

Beweis. Es sei ABCD, Fig. 41, ein beliebiges Viereck; in demselben sei Seite AB = a, AC = b, CD = c, DA = d, Winkel BAD = α und BCD = γ; dann ist nach §. 69 der Inhalt des Vierecks

$$J = \frac{1}{2} ad \sin \alpha + \frac{1}{2} bc \sin \gamma,$$

folglich 1) $ad \sin \alpha + bc \sin \gamma = 2J.$

Drücken wir ferner die Diagonale BD aus den beiden Dreiecken BAD und BCD nach §. 62 aus, so erhalten wir die Gleichung

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma,$$

daher 2) $ad \cos \alpha - bc \cos \gamma = \frac{1}{2} (a^2 - b^2 - c^2 + d^2).$

Wenn wir die Gleichungen (1) und (2) quadriren und addiren, so bekommen wir nach §. 20 und 26 weiter

$$a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \cos (\alpha + \gamma) = 4J^2 + \frac{1}{4} (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2,$$

also $4J^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - \frac{1}{4} (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2 - 2abcd \cos (\alpha + \gamma).$

Denken wir uns die Seiten a, b, c, d als gegeben, die Winkel α und γ aber als unbestimmt gelassen, so sind auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung alle Glieder bis auf das letzte $2abcd \cos (\alpha + \gamma)$ constant, dieses Glied aber nach der verschiedenen Größe der Winkelsumme $\alpha + \gamma$ veränderlich. Dasselbe wird am kleinsten, der Inhalt J folglich am größten, wenn $\alpha + \gamma = 180^0$ ist, also wenn sich um das Viereck ABCD ein Kreis beschreiben läßt*).

2. Lehrsatz. Das regelmäßige Vieleck hat einen größern Inhalt als das unregelmäßige von gleichem Umfange und gleicher Seitenzahl.

Beweis. Es sei ABEFGHKLMN, Fig. 29, das größte Vieleck, welches sich aus einem gegebenen Umfange bei vorgeschriebener Seitenzahl construiren läßt; dann muß dasselbe erstens gleiche Seiten haben. Denn angenommen Seite HK wäre nicht = KL, so ließe sich, wenn wir H mit L verbinden, über HL ein gleichschenkliges Dreieck HXL construiren, in welchem die Seitensumme HX + LX = HK + KL ist. Dann wäre aber nach §. 85, a Anm. $\triangle$ HXL > HKL, folglich auch Vieleck ABEFGHXLMN > ABEFGHKLMN; und es wäre also ABEFGHKLMN nicht das größte Vieleck, welches sich aus dem gegebenen Umfange bei vorgeschriebener Seitenzahl construiren läßt. — Das Vieleck ABEFGHKLMN muß zweitens, wenn es diese Bedingung erfüllen soll, auch gleiche Winkel haben; denn angenommen, es wäre Winkel GHK nicht = HKL; dann ließe sich, wenn wir G mit L

---

*) Wenn wir in der obigen Gleichung $\alpha + \gamma = 180^0$, also $\cos (\alpha + \gamma) = -1$ setzen, so erhalten wir aus derselben nach einiger Umformung für den Inhalt eines Kreisvierecks, dessen Seiten gleich a, b, c, d gegeben sind, die Formel

$$J = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}.$$

verbinden, ein Viereck (Antiparallelogramm) GXYL construiren, in welchem GX = GH, XY = HK, YL = KL und Winkel GXY = XYL ist. Zufolge des vorhergehenden Lehrsatzes wäre aber Viereck GXYL > GHKL, daher auch Vieleck ABEFGXYLMN > ABEFGHKLMN, was gegen unsere Annahme streitet. — Es muß daher das Vieleck, welches bei gegebenem Umfange und vorgeschriebener Seitenzahl den größten Inhalt hat, sowohl gleiche Seiten als auch gleiche Winkel haben, also regelmäßig sein.

Zusatz. In ähnlicher Art, wie wir den zweiten Theil des vorstehenden Beweises geführt haben, läßt sich zeigen, daß ein Vieleck, um welches ein Kreis beschrieben werden kann, größer ist als jedes andere, welches mit demselben in allen Seiten der Reihe nach übereinstimmt.

3. Lehrsatz. Der Kreis hat unter allen Figuren von gleichem Umfange den größten Inhalt.

Beweis. Unter allen möglichen Vielecken, welche man mit einem gegebenen Umfange umschließen kann, haben bei gleicher Seitenzahl die regelmäßigen den größten Inhalt; und die regelmäßigen selbst sind (nach §. 82 Anm.) um so größer, je größer die Zahl ihrer Seiten ist. Da nun der Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten anzusehn ist, so hat derselbe folglich einen größern Inhalt als jede geradlinige Figur von gleichem Umfange.

Der Kreis ist aber auch größer als jede krummlinige Figur mit gleichem Umfange, indem eine krummlinige Figur, welche kein Kreis ist, als ein unregelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten angesehen werden kann.

Dritter Abschnitt.

Aufgaben.

A. Aus der analytischen Trigonometrie*).

*§. 86. Aufgabe.

Den Winkel x aus der Gleichung

$$1)\quad m \sin x = n \cos x$$

zu berechnen.

Auflösung. Dividiren wir die gegebene Gleichung durch $\cos x$, so verwandelt sich dieselbe in

$$2)\quad m \operatorname{tang} x = n,$$

woraus sich ergibt

$$3)\quad \operatorname{tang} x = \frac{n}{m}.$$

Eigentlich liefert die zuletzt erhaltene Gleichung unzählige Werthe für den Winkel x, da alle Winkel, welche sich um 180^0 oder ein Vielfaches von 180^0 unterscheiden, die nämliche trigonometrische Tangente haben. Soll aber der Winkel x in einem Dreiecke liegen, so wird unter diesen unzähligen Werthen nur derjenige zu brauchen sein, welcher

---

*) Wir rathen dem weniger geübten Leser, diese Aufgaben vorläufig zu überschlagen und sogleich zu den Aufgaben über Dreiecke und Vierecke überzugehen, bei denen die synthetische Auflösung, welche sich eng an die Figur anschließt und wegen größerer Anschaulichkeit leichter zu fassen ist, nur die Kenntniß der Fundamentalgleichungen über die Auflösung der Dreiecke erfordert.

kleiner als 180^0 ist. Aehnliche Bemerkungen ließen sich auch an die Auflösungen der nächstfolgenden Aufgaben anschließen; wir werden dieselben jedoch der Kürze wegen und als sich von selbst verstehend übergehen.

*§. 87. Aufgabe.

Den Winkel x aus der Gleichung

$$1)\quad m \sin(\alpha + x) = n \sin(\beta - x)$$

zu berechnen.

Auflösung. Wenn wir $\sin(\alpha + x)$ und $\sin(\beta - x)$ entwickeln, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in

$$2)\quad m \sin\alpha \cos x + m \cos\alpha \sin x = n \sin\beta \cos x - n \cos\beta \sin x.$$

Dividiren wir diese Gleichung durch $\cos x$, so erhalten wir weiter

$$3)\quad m \sin\alpha + m \cos\alpha \tan x = n \sin\beta - n \cos\beta \tan x$$

oder

$$4)\quad (m \cos\alpha + n \cos\beta) \tan x = n \sin\beta - m \sin\alpha,$$

also

$$5)\quad \tan x = \frac{n \sin\beta - m \sin\alpha}{m \cos\alpha + n \cos\beta}.$$

Bemerkung.

Die Gleichung (1) des vorletzten und die Gleichung (2) des letzten §. enthielten eigentlich zwei Unbekannte, nämlich $\sin x$ und $\cos x$; indem wir aber sämmtliche Glieder dieser Gleichungen durch $\cos x$ dividirten, fiel $\cos x$ in den mit diesem Factor multiplicirten Gliedern ganz aus und an die Stelle von $\sin x$ trat $\tan x$. Wir erhielten auf diese Art eine einfache Gleichung mit einer Unbekannten, $\tan x$, welche sich ohne Schwierigkeit auflösen ließ. Dieses Verfahren kann jedoch nur dann Anwendung finden, wenn sämmtliche Glieder der Gleichung entweder $\sin x$ oder $\cos x$ zum Factor haben. Die folgende Aufgabe zeigt, welchen Weg man einzuschlagen hat, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist.

*§. 88. Aufgabe.

Den Winkel x aus der Gleichung

$$1)\quad m \sin x + n \cos x = p$$

zu berechnen.

Auflösung. Wir dividiren zunächst die ganze Gleichung durch m, wodurch sich dieselbe verwandelt in

$$2)\quad \sin x + \frac{n}{m} . \cos x = \frac{p}{m}.$$

Hierauf suchen wir denjenigen Winkel, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{n}{m}$ ist. Bezeichnen wir diesen Winkel mit φ, so ist also

$$3)\quad \tan\varphi = \frac{n}{m},$$

und wir werden daher die Gleichung (2) auch so schreiben können:

$$4)\quad \sin x + \tan\varphi \cos x = \frac{p}{m}$$

oder

$$5)\quad \sin x + \frac{\sin\varphi \cos x}{\cos\varphi} = \frac{p}{m}.$$

Schaffen wir den Bruch weg, so erhalten wir weiter

$$6)\quad \sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{p \cos \varphi}{m},$$

wofür wir offenbar auch kürzer

$$7)\quad \sin(\varphi + x) = \frac{p \cos \varphi}{m}$$

setzen können. Durch die Gleichung (3) ist Winkel φ bestimmt; berechnen wir daher aus der Gleichung (7) den Winkel $\varphi + x$, so ist offenbar auch Winkel x selbst gefunden.

Das so eben zur Auflösung der Gleichung (1) eingeschlagene Verfahren empfiehlt sich dadurch, daß es ganz zum logarithmischen Rechnen geeignet ist. Beabsichtigt man nicht gerade Logarithmen anzuwenden, so kann man auch sin x oder cos x unmittelbar ohne Zuziehung eines Hilfswinkels ausdrücken. Zu diesem Zwecke fügen wir zu der gegebenen Gleichung

$$1)\quad m \sin x + n \cos x = p,$$

welche zwei Unbekannte sin x und cos x enthält und daher allein zur Berechnung derselben nicht ausreichen kann, die allgemeine trigonometrische Gleichung

$$2)\quad \sin x^2 + \cos x^2 = 1$$

hinzu. Aus der ersten Gleichung ist

$$3)\quad \cos x = \frac{p - m \sin x}{n}.$$

Setzen wir diesen Werth in die zweite Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$4)\quad \sin x^2 + \frac{p^2 - 2mp \sin x + m^2 \sin x^2}{n^2} = 1$$

oder

$$5)\quad (m^2 + n^2) \sin x^2 - 2mp \sin x = n^2 - p^2$$

oder

$$6)\quad \sin x^2 - \frac{2mp \sin x}{m^2 + n^2} = \frac{n^2 - p^2}{m^2 + n^2},$$

woraus sich auf bekannte Weise ergibt:

$$7)\quad \sin x = \frac{mp \pm n\sqrt{m^2 + n^2 - p^2}}{m^2 + n^2}$$

und folglich vermöge Gleichung (3)

$$8)\quad \cos x = \frac{np \mp m\sqrt{m^2 + n^2 - p^2}}{m^2 + n^2}.$$

Die hier erhaltenen Gleichungen (7) und (8) liefern, auch wenn $x < 180^0$ gedacht wird, zwei Werthe für x; dasselbe thut, wenn auch weniger augenfällig, die Gleichung (7) des Haupttextes, da jeder Sinus sowohl einem spitzen als auch einem stumpfen Winkel zugehört. Aus den zuletzt erhaltenen Gleichungen (7) und (8) folgt noch, daß, wenn überhaupt die Aufgabe zu lösen sein soll,

$$p^2 \overline{\overline{<}} m^2 + n^2,$$

also

$$p \overline{\overline{<}} \sqrt{m^2 + n^2}$$

sein muß. Dies vorausgesetzt ergeben aber die Gleichungen (7) und (8) für sin x und cos x jedenfalls Werthe, welche die Einheit nicht übersteigen, da sie zufolge der vorstehenden Rechnung der Gleichung (2) Genüge thun. Zwei reelle Ausdrücke müssen nämlich offenbar $\overline{\overline{<}}$ 1 sein, wenn die Summe ihrer Quadrate = 1 ist.

*§. 89. Aufgabe.

Von zwei Winkeln ist die Summe $1)\ x + y = 2\sigma$
und die Differenz der Sinus $2)\ \sin x - \sin y = d$
gegeben; es sollen hieraus diese Winkel berechnet werden.

Auflösung. Da die Summe der Winkel x und y gegeben ist, so haben wir nur nöthig, ihre Differenz $x - y$, welche wir mit 2ϑ bezeichnen wollen, zu suchen. — Nach §. 33 läßt sich die Gleichung (2) in die folgende umformen

$$2 \cos \sigma \sin \vartheta = d,$$

woraus sich

$$\sin \vartheta = \frac{d}{2 \cos \sigma}$$

ergibt. Ist aber hiernach ϑ gefunden, so ist $x = \sigma + \vartheta$ und $y = \sigma - \vartheta$.

*§. 90. Aufgabe.

Die Winkel x und y zu berechnen, wenn die Differenz derselben

$$1)\ x - y = 2\vartheta$$

und die Summe ihrer Cosinus

$$2)\ \cos x + \cos y = a$$

gegeben ist.

Auflösung. Da die Differenz der Winkel x und y gegeben ist, so suchen wir ihre Summe, welche wir mit 2σ bezeichnen. Hierzu gelangen wir leicht, indem wir der Gleichung (2) nach §. 33 die folgende Form geben:

$$2 \cos \sigma \cos \vartheta = a, \text{ also } \cos \sigma = \frac{a}{2 \cos \vartheta}.$$

Haben wir hieraus σ gefunden, so ist $x = \sigma + \vartheta$ und $y = \sigma - \vartheta$.

*§. 91. Aufgabe.

Aus den Gleichungen

$$1)\ x + y = 2\sigma \text{ und } 2)\ \sin x \cos y = a$$

die Winkel x und y zu berechnen.

Auflösung. Wir suchen wieder, da die Summe der Winkel x und y gegeben ist, ihre Differenz und bezeichnen dieselbe mit 2ϑ. Multipliciren wir die Gleichung (2) mit der Zahl 2, so erhalten wir

$$3)\ 2 \sin x \cos y = 2a.$$

Nun ist bekanntlich $\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
und $\sin (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$,
folglich, wenn wir diese Gleichungen addiren,

$$4)\ \sin (x + y) + \sin (x - y) = 2 \sin x \cos y.$$

Aus der Verknüpfung der Gleichungen (3) und (4) ergibt sich

$$5)\ \sin (x + y) + \sin (x - y) = 2a$$

oder

$$6)\ \sin 2\sigma + \sin 2\vartheta = 2a,$$

also

$$7)\ \sin 2\vartheta = 2a - \sin 2\sigma.$$

*§. 92. Aufgabe.

Die Winkel x und y zu berechnen, wenn die Differenz derselben $1)\ x - y = 2\vartheta$
und das Verhältniß ihrer Cosinus

$$2)\ \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{m}{n}$$

gegeben ist.

Auflösung. Nach einem bekannten Satze der Proportionen folgt aus der Gleichung (2) $\frac{\cos y - \cos x}{\cos x + \cos y} = \frac{n - m}{m + n}$,*)
wofür wir nach §. 33 auch setzen können

$$\frac{2 \sin \sigma \sin \vartheta}{2 \cos \sigma \cos \vartheta} = \frac{n - m}{m + n}$$

oder

$$\operatorname{tang} \sigma \operatorname{tang} \vartheta = \frac{n - m}{m + n},$$

also (zufolge §. 18)

$$\operatorname{tang} \sigma = \frac{n - m}{m + n} \operatorname{cotg} \vartheta.$$

*§. 93. Aufgabe.

Die Winkel x und y zu finden, wenn zur Bestimmung derselben die Gleichungen 1) $x - y = 2\vartheta$ und 2) $\sin x^2 + \sin y^2 = a$ gegeben sind.

Auflösung. Wir multipliciren zunächst die Gleichung (2) mit der Zahl (2) und erhalten so $2 \sin x^2 + 2 \sin y^2 = 2a$.
Nach §. 29, a ist $2 \sin x^2 = 1 - \cos 2x$ und $2 \sin y^2 = 1 - \cos 2y$. Setzen wir diese Werthe in die vorhergehende Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in $1 - \cos 2x + 1 - \cos 2y = 2a$,
wofür wir zufolge §. 33 auch setzen können

$$\cos 2\sigma \,.\, \cos 2\vartheta = 1 - a,$$

also

$$\cos 2\sigma = \frac{1 - a}{\cos 2\vartheta}.$$

*§. 94. Aufgabe.

Die Winkel x und y zu finden, wenn zur Bestimmung derselben die Gleichungen 1) $x + y = 2\sigma$ und 2) $\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y = a$ gegeben sind.

Auflösung. Nach §. 36 läßt sich die Gleichung (2) umformen in

$$\frac{\sin (x + y)}{\cos x \cos y} = a,$$

folglich

$$2 \sin (x + y) = 2a \cos x \cos y = a \cos (x + y) + a \cos (x - y)$$

oder

$$2 \sin 2\sigma = a \cos 2\sigma + a \cos 2\vartheta,$$

also

$$\cos 2\vartheta = \frac{2 \sin 2\sigma}{a} - \cos 2\,\sigma.$$

*§. 95. Aufgabe.

Aus den Gleichungen

1) $x + y = 2\sigma$ und 2) $\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} y = d$

die Winkel x und y zu berechnen.

Auflösung. Indem wir in ähnlicher Weise wie im vorhergehenden §. verfahren, formen wir die Gleichung (2) um in

$$2 \sin 2\vartheta - d \cos 2\vartheta = d \cos 2\sigma.$$

---

*) Wenn wir von der einfachsten Annahme ausgehen, daß x und y spitze Winkel sind, und wenn $x > y$ gedacht wird, so ist $\cos y > \cos x$.

Da in dieser Gleichung sowohl der Sinus als auch der Cosinus des gesuchten Winkels 2ϑ vorkommt, so wenden wir weiter das in §. 88 befolgte Verfahren an und setzen demgemäß

$$\frac{d}{2} = \operatorname{tang} \varphi.$$

Dann erhalten wir den gesuchten Winkel 2ϑ aus der Gleichung

$$\sin(2\vartheta - \varphi) = \sin\varphi \cos 2\sigma.$$

In ähnlicher Art wie die vorhergehenden Aufgaben lassen sich überhaupt folgende lösen: Die Winkel x und y zu berechnen, wenn ihre Summe oder Differenz bekannt und eine der nachstehenden Gleichungen gegeben ist,

1) $\sin x + \sin y = a$	10) $\sin x^2 + \sin y^2 = a$
2) $\sin x - \sin y = d$	11) $\sin x^2 - \sin y^2 = d$
3) $\cos x + \cos y = a$	12) $\cos x^2 + \cos y^2 = a$
4) $\cos y - \cos x = d$	13) $\cos y^2 - \cos x^2 = d$
5) $\sin x \,.\, \sin y = a$	14) $\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y = a$
6) $\sin x \,.\, \cos y = a$	15) $\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} y = d$
7) $\cos x \,.\, \cos y = a$	16) $\operatorname{tang} x \,.\, \operatorname{tang} y = a$
8) $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{m}{n}$	17) $\frac{\operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} y} = \frac{m}{n}$.
9) $\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{m}{n}$	

Da von den gesuchten Winkeln entweder die Summe $x + y = 2\sigma$ oder die Differenz $x - y = 2\vartheta$ gegeben sein soll, so sind in den vorstehenden 17 Gleichungen überhaupt 34 Uebungsaufgaben enthalten. — Wir haben in dieser Zusammenstellung die Cotangenten übergangen, da die Cotangente die Reciproke der Tangente ist, und daher die Aufgaben über Cotangenten im Wesentlichen mit den analogen Aufgaben über die Tangenten übereinstimmen.

Von anderen in der obigen Aufzählung übergangenen Combinationen wollen wir noch die beiden folgenden hier anführen:

1) Es sei gegeben 1) $\sin x + \cos y = a$ und 2) $x - y = 2\vartheta$. Bekanntlich ist $\cos y = \sin(90^0 - y)$. Setzen wir nun, um zu kürzen, $90^0 - y = z$, so verwandeln sich die gegebenen Gleichungen in

$$\sin x + \sin z = a$$

und $$x - (90^0 - z) = 2\vartheta \text{ oder } x + z = 90^0 + 2\vartheta,$$

wonach sich die Aufgabe in ganz ähnlicher Art wie §. 89 lösen läßt.

2) Es sei ferner gegeben 1) $\frac{\sin x}{\cos y} = \frac{m}{n}$ und 2) $x + y = 2\sigma$.

Statt des in §. 92 angegebenen Weges der Auflösung, schlagen wir hier bequemer folgendes Verfahren ein: Wenn wir in der Gleichung (1) $x = \sigma + \vartheta$ und $y = \sigma - \vartheta$ setzen, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{\sin(\sigma + \vartheta)}{\cos(\sigma - \vartheta)} = \frac{m}{n} \text{ oder } n \sin(\sigma + \vartheta) = m \cos(\sigma - \vartheta).$$

Entwickeln wir diese Ausdrücke, so erhalten wir weiter

$$n \sin\sigma \cos\vartheta + n \cos\sigma \sin\vartheta = m \cos\sigma \cos\vartheta + m \sin\sigma \sin\vartheta,$$

und wenn wir die ganze Gleichung durch $\cos\sigma \cos\vartheta$ dividiren,

$$n \operatorname{tang}\sigma + n \operatorname{tang}\vartheta = m + m \operatorname{tang}\sigma \operatorname{tang}\vartheta,$$

folglich $$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{m - n \operatorname{tang}\sigma}{n - m \operatorname{tang}\sigma}.$$

B. Aufgaben über Dreiecke.

§. 96. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem die Grundlinie = c, die Höhe = h und eine Seite = b gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Auf einer willkürlichen Linie errichten wir das Lot CD = h, Fig. 30, beschreiben um den Endpunkt C mit b einen Kreis, welcher die zuerst gezogene Linie in A durchschneidet, schneiden von derselben AB = c ab und verbinden endlich B mit C; so ist ABC das verlangte Dreieck.

II. Trigonometr. Auflösung. Wir lösen zunächst das zuerst gezeichnete, rechtwinklige Dreieck ADC auf. Wir kennen in demselben die Hypotenuse AC = b und eine Cathete CD = h und berechnen hieraus den Winkel A durch die Gleichung

$$1)\quad \sin A = \frac{h}{b};$$

ferner
$$AD = \sqrt{b^2 - h^2};$$
dann ist
$$BD = c - AD = c - \sqrt{b^2 - h^2}.$$

Wir sind nun auch im Stande, das rechtwinklige Dreieck BCD aufzulösen, da wir in demselben beide Catheten CD und BD kennen. Wir erhalten den Winkel B durch die Gleichung

$$2)\quad \operatorname{tang} B = \frac{CD}{BD} = \frac{h}{c - \sqrt{(b^2 - h^2)}}.$$

Dann ist
$$3)\quad C = 180^0 - (A + B)$$
und
$$4)\quad BC = \frac{CD}{\sin B} = \frac{h}{\sin B}.$$

Wenn wir AB über A um AB' = c verlängern und C mit B' verbinden, so erhalten wir ein zweites Dreieck AB'C, welches ebenfalls der Aufgabe entspricht, indem es sämmtliche gegebene Stücke CD = h, AC = b und AB' = c enthält. Die Aufgabe hat also zwei verschiedene Auflösungen. In den beiden der Aufgabe entsprechenden Dreiecken ABC und AB'C ergänzen sich die Winkel CAB und CAB' zu einem Flachen. Ganz demgemäß gibt uns die Gleichung (1) der trigonometrischen Auflösung zwei sich zu 180^0 ergänzende Werthe für A, indem jeder Sinus sowohl einem spitzen Winkel als auch dem stumpfen Nebenwinkel angehören kann. — Eben so liefert die Gleichung (2) für den Winkel B, da $\sqrt{b^2 - h^2}$ eben sowohl positiv als negativ sein kann, zwei Werthe. Dasselbe gilt auch noch von der fehlenden Seite BC, wenn wir dieselbe unmittelbar durch die gegebenen Stücke b, c und h ausdrücken. Es ist nämlich bekanntlich

$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Vermöge Gleichung (1) ist
$$\sin A = \frac{h}{b}$$
folglich
$$\cos A = \pm\sqrt{1 - \sin A^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - h^2}}{b}.$$

Setzen wir diesen Werth ein, so erhalten wir

$$BC^2 = b^2 + c^2 \pm 2c\sqrt{b^2 - h^2}.$$

§. 97, a. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem die Höhe = h und die Winkel an der Grundlinie = α und β gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Auf einer beliebigen Linie errichten wir ein Lot CD = h, Fig. 15, und ziehen durch den Endpunkt C zwei dieselbe in A und B schneidende Linien so, daß die eine AC mit AB nach der einen Seite hin einen Winkel CAB = α und die andere BC mit AB nach der entgegengesetzten Seite hin einen Winkel ABC = β bildet*); dann ist ABC das verlangte Dreieck.

II. Trigonometr. Auflösung. Wir können zunächst die rechtwinkligen Dreiecke ACD und BCD auflösen; in dem Dreiecke ACD kennen wir die Cathete CD = a und den gegenüberliegenden spitzen Winkel CAD = α; wir erhalten hieraus die Hypotenuse AC durch die Gleichung

$$1)\quad AC = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

Eben so ergibt sich aus dem Dreieck BCD

$$2)\quad BC = \frac{h}{\sin\beta}.$$

Jetzt sind wir auch im Stande, das Dreieck ABC selbst aufzulösen, da wir in demselben alle Winkel, nämlich BAC = α, ABC = β und folglich auch Winkel ACB = $180^0 - (\alpha + \beta)$, welchen wir der Kürze wegen mit γ bezeichnen wollen, ferner zwei Seiten AC und BC, als bereits berechnet, kennen. Wir erhalten nun die noch fehlende Seite AB nach dem Sinussatze durch die Gleichung

$$AB = \frac{AC \sin\gamma}{\sin\beta},$$

oder wenn wir aus (1) den Werth von AC ersetzen,

$$3)\quad AB = \frac{h \sin\gamma}{\sin\alpha \,.\, \sin\beta}.$$

Aus der zuletzt aufgeführten Gleichung ergibt sich die Proportion

$$h : AB = \sin\alpha \,.\, \sin\beta : \sin\gamma$$

d. h. in jedem Dreiecke verhält sich die Höhe zur Grundlinie wie das Product der Sinus der Winkel an der Grundlinie zum Sinus des Winkels an der Spitze.

§. 97, b. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem die Winkel an der Grundlinie = α und β und der Unterschied der Segmente, in welche die Grundlinie durch die Höhe getheilt wird, = e gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne eine Linie BD = e, Fig. 31, lege in dem einen Endpunkte derselben B den kleinern Winkel β und in dem andern Endpunkte D an die Verlängerung derselben den größern Winkel α an, beschreibe ferner um den Punkt C, in welchem sich die Schenkel dieser Winkel schneiden, mit CD einen Kreis, welcher die verlängerte BD in A trifft und verbinde endlich A mit C; so ist ABC das verlangte Dreieck.

---

*) S. Planimetrie §. 95.

Beweis. Denn Winkel CAD ist = ADC = α, weil AC = DC gemacht ist, ferner Winkel ABC = β nach der Construction, und wenn wir die Höhe CG ziehen, so ist AG = DG, folglich BG — AG = BD, welches = e gemacht ist.

II. Trigonometr. Auflösung. Das Dreieck BCD, welches wir zuerst gezeichnet haben, lösen wir auch zuerst auf. Wir kennen nämlich in demselben die Seite BD = e, den Winkel B = β und den Winkel BDC, als Nebenwinkel von α. Es ergibt sich hieraus zunächst Winkel BCD = ADC — ABC = $\alpha - \beta$, ferner nach dem Sinussatze

$$1)\quad BC = \frac{BD \,.\, \sin BDC}{\sin BCD} = \frac{e \sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$$

und

$$2)\quad AC = CD = \frac{BD \,.\, \sin CBD}{\sin BCD} = \frac{e \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Wir vermögen nun auch das Dreieck ABC selbst aufzulösen, da wir in demselben alle Winkel A = α, B = β und C = $180^0 - (\alpha + \beta)$, wofür wir kürzer γ setzen wollen, und zwei Seiten AC und BC kennen. Wir erhalten aus dem Dreiecke ABC die noch fehlende Grundlinie AB durch die Gleichung

$$AB = \frac{BC \,.\, \sin \gamma}{\sin \alpha},$$

oder wenn wir aus Gleichung (1) den Werth von BC einsetzen,

$$3)\quad AB = \frac{e \sin \gamma}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Die zuletzt erhaltene Gleichung läßt sich auch in Form der folgenden Proportion schreiben:

$$AB : e = \sin \gamma : \sin(\alpha - \beta).$$

Bezeichnen wir die Segmente BG und AG beziehlich mit p und q, ersetzen wir ferner $\alpha - \beta$ durch 2ϑ und γ durch $180^0 - 2\sigma$, folglich $\sin \gamma$ durch $\sin 2\sigma$, so verwandelt sich die vorstehende Proportion in:

$$p + q : p - q = \sin 2\sigma : \sin 2\vartheta,$$

d. h. die Summe der Segmente verhält sich zu ihrer Differenz wie der Sinus der Summe der Winkel an der Grundlinie zu dem Sinus der Differenz dieser Winkel.

§. 98. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, wenn von demselben der Winkel an der Spitze = γ, die Halbirungslinie desselben = l und das Verhältniß der einschließenden Seiten = m : n gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne einen Winkel DCE = γ, Fig. 32, mache die Schenkel desselben CD = n und CE = m und ziehe DE. Hierauf halbire man den Winkel DCE durch eine Linie, welche DE in G schneidet, trage auf diese Linie von C aus die gegebene Linie l = CF auf und ziehe endlich AB || DE; dann ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Denn es enthält den Winkel ACB = γ und die Halbirungslinie CF = l nach der Construction. Da ferner AB || DE ist, so verhält sich

$$BC : AC = CE : CD = m : n.$$

II. Trigonometr. Auflösung. Wir lösen zuerst das Dreieck CDE auf, welches wir auch zuerst gezeichnet haben. Wir kennen darin zwei Seiten CE = m, CD = n und den eingeschlossenen Winkel DCE = γ. Wir

bestimmen daher zunächst die halbe Summe der fehlenden Winkel D und E, welche wir mit σ bezeichnen, durch die Gleichung

$$\sigma = \frac{180^0 - \gamma}{2}$$

und erhalten dann weiter die halbe Differenz derselben, welche wir ϑ nennen, nach dem Tangentesatze durch die Gleichung

$$\text{tang}\,\vartheta = \frac{(m - n)\,\text{tang}\,\sigma}{m + n}.$$

Dann ist $D = \sigma + \vartheta$, $E = \sigma - \vartheta$, also auch, da $A = D$ und $B = E$ ist, 1) $A = \sigma + \vartheta$ und 2) $B = \sigma - \vartheta$.
Wir kennen jetzt in den Dreiecken AFC und BFC eine Seite $CF = l$ und alle Winkel; wir berechnen hieraus

$$AC = \frac{l \sin AFC}{\sin A} \text{ und } BC = \frac{l \sin BFC}{\sin B}.$$

Da $\sin AFC = \sin BFC$ und Winkel $BFC = A + \frac{1}{2}\gamma$ ist, so können wir sowohl $\sin AFC$ als auch $\sin BFC$ durch $\sin(A + \frac{1}{2}\gamma)$ ersetzen. Durch diese Substitution verwandeln sich die vorstehenden Gleichungen in

$$3)\ AC = \frac{l \sin(A + \frac{1}{2}\gamma)}{\sin A} \text{ und } 4)\ BC = \frac{l \sin(A + \frac{1}{2}\gamma)}{\sin B}.$$

Wir erhalten endlich die noch fehlende Seite AB aus dem Dreieck ABC, in welchem uns bereits alle Winkel und zwei Seiten bekannt sind, nach dem Sinussatze durch die Gleichung

$$AB = \frac{BC \sin \gamma}{\sin A},$$

oder wenn wir den Werth von BC aus der Gleichung (4) einsetzen

$$5)\ AB = \frac{l \sin(A + \frac{1}{2}\gamma) \,.\, \sin\gamma}{\sin A \,.\, \sin B}.$$

§. 99. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem zwei Seiten = a und b und die Mittellinie, d. h. die Linie, welche die Spitze mit der Mitte der Grundlinie verbindet, = t gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Es sei ABC, Fig. 33, das zu zeichnende Dreieck; vervollständigen wir dasselbe zu dem Parallelogramme ACBE, so entstehen die Dreiecke ACE und BCE, in welchen, wie leicht zu sehen, alle drei Seiten bekannt sind. Wir erhalten daher das verlangte Dreieck, indem wir zuerst ein Dreieck ACE zeichnen, in welchem Seite $AC = b$, $AE = a$ und $CE = 2t$ ist, hierauf den Punkt A mit der Mitte D der Linie CE verbinden, die Linie AD über D um ihre eigene Länge bis B verlängern und B mit C verbinden.

Beweis. Nach der Construction ist die Mittellinie $CD = t$ und Seite $AC = b$. Ferner ist das $\triangle\, ADE \cong BDC$ ($AD = BD$, $DE = CD$, Winkel $ADE = BDC$), folglich $BC = AE = a$.

II. Trigonometr. Auflösung. In dem Dreiecke ACE kennen wir die drei Seiten, $AC = b$, $AE = a$, $CE = 2t$; wir können daher Winkel CAE nach der Cotangentenformel des §. 68 berechnen. Setzen wir zu diesem

Zwecke $^1/_2(a + b + 2t) = p$, und erwägen wir ferner, daß Winkel CAE $= 180^0 - ACB = 180^0 - \gamma$, also $^1/_2 CAE = 90^0 - {}^1/_2\gamma$ und $\cot{}^1/_2 CAE = \tan{}^1/_2\gamma$ ist, so erhalten wir die Gleichung

$$\tan{}^1/_2\gamma = \sqrt{\frac{p(p-2t)}{(p-a)(p-b)}}.$$

Da wir jetzt in dem Dreiecke ABC zwei Seiten AC = b und BC = a und den eingeschlossenen Winkel C kennen, so ergeben sich die noch fehlenden Stücke durch die Gleichungen des §. 66:

$$\sigma = 90^0 - {}^1/_2\gamma$$

$$\tan\vartheta = \frac{(a-b)\tan\sigma}{a+b}$$

$$A = \sigma + \vartheta,\ B = \sigma - \vartheta,$$

$$AB = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Die Grundlinie AB, welche wir der Kürze wegen mit c bezeichnen wollen, läßt sich auch noch leicht unmittelbar durch die gegebenen Stücke ausdrücken. Es ist nämlich in dem Parallelogramm ABCE nach 62, Anm.

$$c^2 + 4t^2 = 2a^2 + 2b^2,$$

folglich

$$c^2 = 2a^2 + 2b^2 - 4t^2.$$

In ähnlicher Art, wie die vorhergehenden Aufgaben, lassen sich, außer vielen anderen, die in der folgenden Zusammenstellung aufgeführten Aufgaben lösen, in welchen wir der Kürze wegen die drei Seiten des Dreiecks mit a, b, c, die ihnen gegenüberliegenden Winkel mit α, β, γ, die Höhe mit h, den Unterschied der Segmente, in welche sie die Grundlinie theilt, mit e, die Mittellinie mit t, die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze mit l, ferner die aus den Endpunkten der Grundlinie auf die Seiten a und b gefällten Lote beziehlich mit h′ und h″ bezeichnet haben,

1)	h, α, b	14)	l, α, β
2)	h, α, c	15)	l, α, b
3)	h, α, a	16)	l, γ, a
4)	h, a, γ	17)	e, a, b
5)	h, t, α	18)	e, a, α
6)	h, t, a	19)	e, a, β
7)	h, t, c	20)	e, a, $\alpha - \beta$
8)	h, l, γ	21)	a, b, $\alpha - \beta$
9)	h, l, α	22)	h′, h″, γ
10)	h, l, a	23)	h′, h″, c
11)	t, γ, a	24)	h′, c, t
12)	t, α, b	25)	h′, β, t
13)	t, α, c	26)	h′, γ, l

27) Die Mittellinie t und die Winkel, welche sie mit den Seiten bildet.

28) Die Mittellinie t, eine Seite a und der Winkel, welchen sie mit der andern Seite b bildet.

§. 100, a. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem der Umfang = 2p und zwei Winkel α und β, also auch der dritte Winkel, welchen wir mit γ bezeichnen wollen, gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Man ziehe eine Linie DE = 2p, Fig. 34, lege an dieselbe in D den Winkel $^1/_2\alpha$ = CDE und in E den Winkel $^1/_2\beta$ = CED, ferner in dem Punkte C, in welchem sich die Schenkel dieser Winkel schneiden, an CD nochmals den Winkel $^1/_2\alpha$ = ACD und an CE den Winkel $^1/_2\beta$ = BCE an; dann ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Denn zunächst ist Winkel CAB = ADC + ACD = $^1/_2\alpha + {}^1/_2\alpha = \alpha$; eben so ist Winkel ABC = BEC + BCE = $^1/_2\beta + {}^1/_2\beta = \beta$. Da ferner Winkel ADC = ACD und BEC = BCE gemacht ist, so ist AC = AD und BC = BE, folglich AC + AB + BC = DE = 2p.

II. Trigonometr. Auflösung. A) Synthetisch. In dem zuerst gezeichneten Dreiecke CDE kennen wir eine Seite DE = 2p und die beiden anliegenden Winkel CDE = $^1/_2\alpha$ und CED = $^1/_2\beta$; wir berechnen hieraus

$$CD = \frac{2p \cdot \sin {}^1/_2\beta}{\sin DCE} \text{ und } CE = \frac{2p \cdot \sin {}^1/_2\alpha}{\sin DCE}.$$

Der Winkel DCE ist $= 180^0 - ({}^1/_2\alpha + {}^1/_2\beta)$, folglich $\sin DCE = \sin ({}^1/_2\alpha + {}^1/_2\beta) = \cos {}^1/_2\gamma$, da $^1/_2\alpha + {}^1/_2\beta$ und $^1/_2\gamma$ sich zu 90^0 ergänzen. Hiernach verwandeln sich die obigen Ausdrücke in

$$CD = \frac{2p \cdot \sin {}^1/_2\beta}{\cos {}^1/_2\gamma} \text{ und } CE = \frac{2p \cdot \sin {}^1/_2\alpha}{\cos {}^1/_2\gamma}.$$

Nun sind in den gleichschenkligen Dreiecken ACD und BCE die Grundlinien CD und CE und alle Winkel bekannt; wir finden hieraus, (indem wir uns aus den Spitzen A und B Lote auf die Grundlinien CD und CE gefällt denken), die Seiten

$$AC = \frac{CD}{2 \cos {}^1/_2\alpha} \text{ und } BC = \frac{CE}{2 \cos {}^1/_2\beta},$$

oder wenn wir die oben für CD und CE erhaltenen Werthe einsetzen,

$$AC = \frac{p \cdot \sin {}^1/_2\beta}{\cos {}^1/_2\alpha \;.\; \cos {}^1/_2\gamma} \text{ und } BC = \frac{p \cdot \sin {}^1/_2\alpha}{\cos {}^1/_2\beta \;.\; \cos {}^1/_2\gamma}.$$

Wir können diese Gleichungen in Worten dahin aussprechen: die Seite eines Dreiecks ist gleich dem halben Umfange multiplicirt mit dem Sinus des halben gegenüberliegenden Winkels und dividirt durch das Product der Cosinus der halben anliegenden Winkel. Da dieselbe Regel offenbar auch für die dritte Seite gelten muß, so werden wir sofort setzen können:

$$AB = \frac{p \cdot \sin {}^1/_2\gamma}{\cos {}^1/_2\alpha \cos {}^1/_2\beta}.$$

B) Analytisch. Wenn wir der Kürze wegen die Seiten des Dreiecks mit a, b und c bezeichnen, so erhalten wir unmittelbar aus der Aufgabe die Gleichung 1) $a + b + c = 2p$.

Fügen wir hierzu die trigonometrischen Gleichungen

2) $b : a = \sin \beta : \sin \alpha$

und 3) $c : a = \sin \gamma : \sin \alpha$,

so haben wir drei einfache Gleichungen mit drei Unbekannten a, b und c. Wir lösen dieselben auf, indem wir aus (2) und (3) die Werthe, von b und c in (1) einsetzen. Wir erhalten so

$$a + \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} + \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = 2p$$

oder wenn wir die ganze Gleichung mit $\sin \alpha$ multipliciren:

$$a \sin \alpha + a \sin \beta + a \sin \gamma = 2p \,.\, \sin \alpha,$$

Aus (2) und (3) ergibt sich weiter $b = \dfrac{2p \,.\, \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}$

folglich $a = \dfrac{2p \,.\, \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}$.

und $c = \dfrac{2p \,.\, \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}$.

Daß die hier erhaltenen Ausdrücke von den in der synthetischen Auflösung gefundenen Werthen nur in der Form verschieden sind, die einen sich in die andern verwandeln lassen, haben wir bereits oben in der Anmerkung zu §. 37 dargethan.

§. 100, b. Zusatz.

Wenn wir aus dem Umfange und den drei Winkeln den Inhalt J des Dreiecks berechnen sollen, so erhalten wir zunächst aus §. 69 die Gleichung

$$J = \tfrac{1}{2}AC \,.\, BC \,.\, \sin \gamma;$$

und wenn wir für AC und BC die in der synthetischen Auflösung gewonnenen Werthe einsetzen und zugleich berücksichtigen, daß nach §. 29 $\sin \gamma = 2 \sin \tfrac{1}{2}\gamma \cos \tfrac{1}{2}\gamma$ ist, so ergibt sich

$$J = \frac{p^2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha \sin \tfrac{1}{2}\beta \sin \tfrac{1}{2}\gamma}{\cos \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\gamma}$$

oder $J = p^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\gamma$.

Zufolge des in der Anm. zu §. 37 angeführten Satzes fällt das Product $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\gamma$ dann am größten aus, wenn $\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}\gamma$ ist. Unter allen Dreiecken von gleichem Umfange hat daher das gleichseitige den größten Inhalt und folglich auch den größten Radius des einbeschriebenen, aber den kleinsten Radius des umbeschriebenen Kreises, wie sich leicht aus der Gleichung (1) des §. 85, a ergibt.

In ähnlicher Art wie die vorhergehenden Aufgaben sind die folgenden zu behandeln: Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem gegeben sind zwei Winkel und

1) die Summe oder
2) die Differenz der beiden Seiten,
3) der Unterschied zwischen der Summe der beiden Seiten und der Grundlinie.

§. 101. Aufgabe.

Von einem Dreiecke ist ein Winkel CAB, Fig. 37, $= \alpha$, eine anliegende Seite AC = b und die Summen der beiden anderen Seiten AB + BC = f gegeben. Es sollen hieraus die fehlenden Stücke trigonometrisch berechnet und das Dreieck gezeichnet werden.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne einen Winkel $A = \alpha$ mache den einen Schenkel AC = b, den andern Schenkel AD = f und ziehe CD; hierauf lege man in C an CD den entstandenen Winkel ADC = BCD, an; so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Denn die Seite AB ist = b und der Winkel CAB $= \alpha$ nach der Construction; die Seite BC ist aber = BD, weil Winkel BDC = BCD gemacht ist; folglich ist AB + BC = AD = f.

II. Trigonometr. Auflösung. A) Synthetisch. In dem zuerst gezeichneten Dreiecke ADC kennen wir zwei Seiten AC = b, AD = f und den

eingeschlossenen Winkel CAD $= \alpha$. Wir erhalten zunächst den Winkel $D = {}^1/_2B$ durch die Gleichung des §. 60

$$1)\quad \tan {}^1/_2B = \frac{AC \sin A}{AD - AC \,.\, \cos A} = \frac{b \sin \alpha}{f - b \cos \alpha}.$$

Ist aus dieser Gleichung ${}^1/_2B$ gefunden, so ist

$$2)\quad C = 180^0 - (\alpha + B)$$

und aus dem Dreiecke ABC, in welchem wir jetzt alle Winkel und eine Seite $AB = c$ kennen, nach dem Sinussatze $3)\ BC = \frac{c \sin \alpha}{\sin C}$ und $4)\ AC = \frac{c \sin B}{\sin C}$.

B) Analytisch. Wir können jedoch die fehlenden Seiten BC und AC auch direct aus den gegebenen Stücken b, f, α erhalten. Zu diesem Zwecke setzen wir $BC = x$ und $AC = y$. Dann ergibt sich aus der Aufgabe selbst zunächst die Gleichung $1)\ x + y = f$
und nach dem pythagoräischen Lehrsatze der Trigonometrie

$$2)\quad x^2 = b^2 + y^2 - 2by \cos \alpha.$$

Setzen wir den Werth von $x (= f - y)$ aus der ersten Gleichung in die zweite, so verwandelt sich dieselbe in

$$f^2 - 2fy + y^2 = b^2 + y^2 - 2by \cos \alpha$$

oder

$$f^2 - b^2 = 2fy - 2by \cos \alpha,$$

folglich

$$y = \frac{f^2 - b^2}{2f - 2b \cos \alpha}$$

und

$$x = f - y = f - \frac{f^2 - b^2}{2f - 2b \cos \alpha} = \frac{f^2 + b^2 - 2bf \cos \alpha}{2f - 2b \cos \alpha}.$$

Dieser für x erhaltene Werth kann auch leicht unmittelbar aus der Figur abgeleitet werden. Der Zähler des vorstehenden Bruches ist nämlich, wie leicht zu sehn, $= CD^2$; denken wir uns nun noch aus C auf AD ein Lot CZ gefällt, so ist der Nenner $= 2DZ$. Es geht daher die zuletzt erhaltene Gleichung über in

$$x = \frac{CD^2}{2DZ} \text{ oder } 2x : CD = CD : DZ,$$

eine Proportion, deren Richtigkeit sich leicht ergibt, wenn wir um B mit BC einen Halbkreis beschreiben, welcher die verlängerte AB in U durchschneidet und C mit U verbinden. Dann ist $2x = DU$ die Hypotenuse und CD die Cathete des entstandenen rechtwinkligen Dreiecks DCU, DZ aber der der Cathete BD anliegende Abschnitt der Hypotenuse.

Wenn dahin gestrebt werden sollte, die Winkel des Dreiecks in einer für das logarithmische Rechnen bequemen Weise zu erhalten, so wird man hierzu gelangen, wenn man auf das Dreieck ACD, Fig. 37, den Tangentesatz (§. 65) anwendet,

$$\tan \frac{ACD - ADC}{2} : \tan \frac{ACD + ADC}{2} = f - b : f + b.$$

Winkel $ACD - ADC$ ist $= ACB$, wofür wir kürzer γ setzen wollen; $ACD + ADC$ ist $= 180^0 - \alpha$, folglich $\tan \frac{ACD + ADC}{2} = \cot {}^1/_2\alpha$. Setzen wir diese Werthe in die vorstehende Proportion ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$\tan {}^1/_2\gamma : \cot {}^1/_2\alpha = f - b : f + b,$$

woraus sich ergibt

$$\tan {}^1/_2\gamma = \frac{(f - b) \cot {}^1/_2\alpha}{f + b}.$$

Wir können zu dieser Gleichung auch noch in folgender Art gelangen: Nach dem Cotangentensatze (§. 68) ist

$$\cot \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} \text{ und } \cot \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}},$$

Multipliciren wir diese Gleichungen mit einander, so ergibt sich

$$\cot \tfrac{1}{2}\alpha \cot \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{p}{p-b} = \frac{a+b+c}{a+c-b} = \frac{f+b}{f-b},$$

$$\text{folglich } \cot \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{f+b}{(f-b)\cot \tfrac{1}{2}\alpha} \text{ und } \tan \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{(f-b)\cot \tfrac{1}{2}\alpha}{f+b}.$$

Ist aber aus dieser Gleichung Winkel C $= \gamma$ gefunden, so ist auch W. B $= 180^0 - (\alpha + \gamma)$ bekannt, und die noch fehlenden Seiten AC und BC können nach Gleichung (3) und (4) in einer für das logarithmische Rechnen bequemen Weise erhalten werden.

In ähnlicher Art sind die Aufgaben zu behandeln, wenn von einem Dreiecke gegeben sind:

1) eine Seite, der Unterschied der beiden andern Seiten und der der größern oder
2) der der kleineren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel,
3) der Unterschied der Segmente, in welchen die Grundlinie durch die Höhe getheilt wird, die Summe der Seiten und der der größeren oder
4) der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel;
5) der Unterschied der Segmente, der Unterschied der Seiten und der der größeren oder
6) der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel;
7) die Grundlinie, der Winkel an der Spitze und das Verhältniß der Seiten;
8) der Unterschied der Segmente, der Unterschied der Winkel an der Grundlinie und das Verhältniß der Seiten.

Bemerkung.

Ehe wir zu den folgenden Aufgaben übergehen, schicken wir noch einen Satz voraus, in welchem die Analysis für die meisten derselben enthalten ist.

§. 102. Hilfssatz.

Wenn man mit der kleineren Seite AC eines Dreiecks ABC, Fig. 35, um die Spitze C einen Kreis beschreibt, welcher die Grundlinie AB in D, die Seite BC in E und ihre Verlängerung in F schneidet, ferner AE, AF, CD, DE und DF zieht und der Kürze wegen die Winkel des Dreiecks mit α, β, γ und die ihnen gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c bezeichnet, so ist

1) BF = BC + AC = a + b
2) BE = BC — AC = a — b
3) W. AFB $= \tfrac{1}{2}$ ACB $= \tfrac{1}{2}\gamma$
4) W. ACF $= \alpha + \beta = 2\sigma$
5) W. ADF = AEF $= \tfrac{1}{2}$ ACF $= \frac{\alpha+\beta}{2} = \sigma$
6) W. BCD $= \alpha - \beta = 2\vartheta$
7) W. EAD = EFD $= \tfrac{1}{2}$ ECD $= \vartheta$
8) W. FAE $= 90^0 =$ FDE.

In dem in den Kreis gezeichneten Vierecke ADEF ist W. ADE + AFE = 180^0, und da auch ADE + EDB = 180^0 ist, so ist folglich

9) W. EDB = AFE $= \tfrac{1}{2}\gamma$.

Endlich wollen wir unsere Leser noch auf die folgende Beziehung, welche weiterhin häufige Anwendung findet, aufmerksam machen: Da die Winkel 2σ und γ sich zu 180^0 und Winkel σ und $\frac{1}{2}\gamma$ sich zu 90^0 ergänzen, so ist

$$\sin\gamma = \sin 2\sigma \text{ und } \cos\gamma = -\cos 2\sigma,$$
$$\sin \tfrac{1}{2}\gamma = \cos\sigma \text{ und } \cos \tfrac{1}{2}\gamma = \sin\sigma.$$

§. 103. Zusatz.

Wenn man in dem Dreiecke ABC, Fig. 31, die Höhe CG zieht und mit AC um C einen Kreis beschreibt, welcher die Grundlinie in D schneidet, so ist

$$BD = BG - AG.$$

Bezeichnen wir noch der Kürze wegen BG mit p, AG mit q und die Höhe CG mit h, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken BGC und AGC

$$a^2 = h^2 + p^2$$

und $$b^2 = h^2 + q^2,$$

folglich, wenn wir diese Gleichungen von einander subtrahiren,

$$a^2 - b^2 = p^2 - q^2$$

oder $$(a + b) \cdot (a - b) = (p + q) \cdot (p - q).$$

Wir sprechen diesen Satz, indem wir die Abschnitte, in welche die Grundlinie durch die Höhe getheilt wird, hier so wie im Folgenden die Segmente nennen, dahin aus:

In jedem Dreiecke ist das Rechteck aus der Summe und Differenz der Seiten gleich dem Rechteck aus der Summe und Differenz der Segmente. — Die so eben erwiesene Gleichung läßt sich auch in die Form der folgenden Proportion bringen:

$$a + b : p + q = p - q : a - b$$

d. h. in Figur 35: $BF : AB = BD : BE$

eine Proportion, deren Richtigkeit bereits in der Planimetrie (§. 200) dargethan ist.

§. 104. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem die Grundlinie = c, der Unterschied der beiden andern Seiten = d und der Winkel an der Spitze = γ gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne einen Winkel AEC = σ (= $90^0 - \frac{1}{2}\gamma$), Fig. 34, verlängere den Schenkel CE über E um EB = d, beschreibe um B mit c einen Kreis, welcher den andern Schenkel dieses Winkels in A schneidet, ziehe AB und lege in A an AE den Winkel σ = CAE nochmals an; so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Denn erstens ist AB = c nach der Construction; da ferner Winkel CAE = CEA gemacht ist, so ist AC = CE, folglich BC — AC = BE = d; endlich ist Winkel CAE + CEA = 2σ, folglich Winkel ACE = $180^0 - 2\sigma = \gamma$.

II. Trigonometr. Auflösung. A) Synthetisch. Wir lösen zunächst das zuerst gezeichnete Dreieck ABE auf, in welchem wir zwei Seiten AB = c, BE = d und den der ersteren gegenüberliegenden Winkel AEB = $180^0 - \sigma$ kennen. Wir berechnen hieraus den der andern Seite gegenüberliegenden Winkel BAE nach dem Sinussatze durch die Gleichung

$$\sin BAE = \frac{d \sin AEB}{c}$$

Bekanntlich ist Winkel $BAE = \frac{A - B}{2} = \vartheta$, und da der Sinus eines stumpfen Winkels dem Sinus des spitzen Nebenwinkels gleich ist, $\sin AEB = \sin AEC = \sin \sigma$. Setzen wir diese Werthe in die so eben erhaltene Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$1)\quad \sin \vartheta = \frac{d \sin \sigma}{c}.$$

Ist hieraus ϑ gefunden, so ist 2) $A = \sigma + \vartheta$ und $B = \sigma - \vartheta$.

Wir sind nun auch im Stande, das Dreieck ABC selbst aufzulösen, da wir in demselben alle Winkel und eine Seite $AB = c$ kennen. Wir finden daher die noch fehlenden Seiten durch die Gleichungen:

$$3)\quad BC = \frac{c \sin A}{\sin \gamma} \quad \text{und} \quad 4)\quad AC = \frac{c \sin B}{\sin \gamma}.$$

B) Analytisch. Zufolge der Aufgabe ist

$$BC - AC = d.$$

Da wir die Winkel suchen wollen, so drücken wir die unbekannten Seiten BC und AC durch die gegebene Seite c und die zu berechnenden Winkel des Dreiecks ABC auf bekannte Weise aus. Dann verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$\frac{c \sin A}{\sin \gamma} - \frac{c \sin B}{\sin \gamma} = d$$

oder

$$\sin A - \sin B = \frac{d \sin \gamma}{c} = \frac{d \sin 2\sigma}{c},$$

da bekanntlich $\sin \gamma = \sin 2\sigma$ ist. — Nach §§. 33 und 29 können wir die vorstehende Gleichung in die folgende umformen:

$$2 \sin \frac{A - B}{2} \cos \frac{A + B}{2} = \frac{2\, d \sin \sigma \cos \sigma}{c}$$

oder

$$2 \sin \vartheta \cos \sigma = \frac{2\, d \sin \sigma \cos \sigma}{c},$$

also

$$\sin \vartheta = \frac{d \sin \sigma}{c}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich die Proportion

$$d : c = \sin \vartheta : \sin \sigma,$$

d. h. in jedem Dreiecke verhält sich der Unterschied der Seiten zur Grundlinie wie der Sinus der halben Differenz zum Sinus der halben Summe der Winkel an der Grundlinie.

Ist aus der vorstehenden Gleichung ϑ gefunden, so werden die noch fehlenden Stücke eben so wie in der synthetischen Auflösung berechnet.

Man kann jedoch auch die unbekannten Seiten BC und AC, welche wir mit x und y bezeichnen wollen, unmittelbar durch die gegebenen Stücke c, d und γ ausdrücken. Wir bilden zu diesem Zwecke die Gleichungen

$$1)\quad x - y = d,$$

und indem wir den pythagoräischen Lehrsatz auf das Dreieck ABC anwenden,

$$2)\quad x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma = c^2.$$

Da in der letzteren Gleichung die Unbekannten x und y symmetrisch vorkommen, (sich mit einander vertauschen lassen,) und ihre Differenz gegeben ist, so gewinnen wir an Kürze der Rechnung, wenn wir dieselben nicht un-

mittelbar, sondern ihre Summe, welche wir mit f bezeichnen wollen, suchen. Da

$$x + y = f \text{ und } x - y = d$$

sein soll, so ist $x = \frac{f + d}{2}$ und $y = \frac{f - d}{2}$,

folglich $x^2 = \frac{f^2 + 2df + d^2}{4}$ und $y^2 = \frac{f^2 - 2df + d^2}{4}$,

also $x^2 + y^2 = \frac{2f^2 + 2d^2}{4}$.

Ferner ist $xy = \frac{f + d}{2} \cdot \frac{f - d}{2} = \frac{f^2 - d^2}{4}$.

Wenn wir diese Werthe in die Gleichung (2) einsetzen, so verwandelt sich dieselbe in: $\frac{2f^2 + 2d^2}{4} - \frac{2(f^2 - d^2)}{4} \cdot \cos \gamma = c^2$

oder $f^2 + d^2 - (f^2 - d^2) \cos \gamma = 2c^2$

oder $f^2 - f^2 \cos \gamma + d^2 + d^2 \cos \gamma = 2c^2$

oder $f^2(1 - \cos \gamma) + d^2 (1 + \cos \gamma) = 2c^2$

Nach §. 29, b ist $1 - \cos \gamma = 2 \sin {}^1/_2\gamma^2$ und $1 + \cos \gamma = 2 \cos {}^1/_2\gamma^2$. Setzen wir diese Werthe in die vorstehende Gleichung ein, so erhalten wir weiter $2f^2 \sin {}^1/_2\gamma^2 + 2d^2 \cos {}^1/_2\gamma^2 = 2c^2$,

also $f^2 = \frac{c^2 - d^2 \cos {}^1/_2\gamma^2}{\sin {}^1/_2 \gamma^2}$

und folglich $f = \frac{\sqrt{c^2 - d^2 \cos {}^1/_2\gamma^2}}{\sin {}^1/_2\gamma}$.

Demnach ist $x = \frac{+ d + f}{2} = \frac{d \sin {}^1/_2\gamma + \sqrt{c^2 - d^2 \cos {}^1/_2\gamma^2}}{2 \sin {}^1/_2\gamma}$

und $y = \frac{- d + f}{2} = \frac{- d \sin {}^1/_2\gamma + \sqrt{c^2 - d^2 \cos {}^1/_2\gamma^2}}{2 \sin {}^1/_2\gamma}$.

Die so eben durch algebraische Rechnung erhaltenen Werthe von x und y lassen sich auch leicht auf synthetischem Wege herleiten. Ziehen wir nämlich in Fig. 36 aus B auf die verlängerte AE die Senkrechte BH, so ist Winkel BEH = AEC = σ = $90^0 - {}^1/_2\gamma$, folglich in dem rechtwinkligen △ BHE BH = $d \sin \sigma = d \cos {}^1/_2\gamma$ und EH = $d \cos \sigma = d \sin {}^1/_2\gamma$, daher in dem rechtwinkligen △ AHB

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{c^2 - d^2 \cos {}^1/_2\gamma^2}$$

und $AE = - EH + AH = - d \sin {}^1/_2\gamma + \sqrt{c^2 - d^2 \cos {}^1/_2\gamma^2}$.

In dem gleichschenkligen Dreiecke ACE ist

$$AC = \frac{AE}{2 \sin {}^1/_2\gamma} = \frac{- d \sin {}^1/_2\gamma + \sqrt{c^2 - d^2 \cos {}^1/_2\gamma^2}}{2 \sin {}^1/_2\gamma},$$

was mit dem oben für y erhaltenen Werthe übereinstimmt. Ist aber y gefunden, so ist

$$x = d + y.$$

In ganz ähnlicher Art, wie die vorhergehende Aufgabe können die folgenden behandelt werden. Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, wenn von demselben gegeben sind

1) Die Grundlinie, der Winkel an der Spitze und die Summe der einschließenden Seiten;

2) Der Unterschied der Segmente = e, der Unterschied der Winkel an der Grundlinie = 2ϑ und die Summe der beiden Seiten;

3) e, 2ϑ und die Differenz der Seiten.

4) Die Mittellinie, der Winkel an der Spitze und die Summe oder

5) die Differenz der Seiten.

§. 105. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem der Winkel an der Spitze = γ, der Unterschied der einschließenden Seiten = d und der Unterschied der Segmente = e gegeben ist.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne einen Winkel EDB = $\frac{1}{2}\gamma$, Fig. 35, mache den einen Schenkel BD = e und beschreibe um B mit d einen Kreis, welcher den andern Schenkel in zwei Punkten durchschneidet. Den D zunächst liegenden Durchschnittspunkt E*) verbinde man mit B, verlängere dann BE über E und trage den entstandenen Außenwinkel im Punkte D an DE an, so daß also Winkel CDE = CED wird. Endlich beschreibe man mit CD (oder CE) einen Kreis um C, welcher die verlängerte BD in A schneidet, und ziehe AC; so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Denn BD ist = e gemacht und, wie leicht zu sehen, BC — AC = BE = d. Da ferner Winkel BDE = $\frac{1}{2}\gamma$ gemacht ist, so ist sein Nebenwinkel ADE = $180^0 - \frac{1}{2}\gamma$; verlängern wir nun noch BC über C hinaus, bis die Verlängerung den um C mit AC beschriebenen Kreis in F durchschneidet, und ziehen AF, so ist in dem Kreise das Viereck ADEF entstanden und in demselben Winkel ADE + AFE = 180^0, also, da Winkel ADE = $180^0 - \frac{1}{2}\gamma$ ist, Winkel AFE = $\frac{1}{2}\gamma$ und folglich der Centriwinkel ACE = γ.

II. Trigonometr. Auflösung. 1) Synthetisch. Wir lösen zunächst das Dreieck BDE auf, welches wir auch zuerst gezeichnet haben; in demselben kennen wir zwei Seiten BD = e, BE = d und den der einen gegenüberliegenden Winkel BDE = $\frac{1}{2}\gamma$. Wir erhalten den der andern Seite gegenüberliegenden Winkel BED nach dem Sinussatze durch die Gleichung

$$\sin BED = \frac{e \cdot \sin BDE}{d}.$$

Da der Sinus eines stumpfen Winkels gleich dem Sinus des spitzen Nebenwinkels ist, so ist sin BED = sin DEF; bezeichnen wir ferner den Unterschied der gesuchten Winkel A und B mit 2ϑ, so ist bekanntlich Winkel DFE = ϑ, und da Winkel FDE, als Winkel im Halbkreise, = 90^0 ist, so ist Winkel DEF = $90^0 - \vartheta$, also $\sin BED = \sin DEF = \sin(90^0 - \vartheta) = \cos\vartheta$. Wenn wir ferner die Summe der gesuchten Winkel mit 2σ bezeichnen, so ist $\sin BDE = \sin \frac{1}{2}\gamma = \cos\sigma$, da $\frac{1}{2}\gamma$ und σ sich zu 90^0 ergänzen. Demnach läßt sich die obige Gleichung kürzer also schreiben:

$$1)\quad \cos\vartheta = \frac{e\cos\sigma}{d}.$$

Ist aber aus dieser Gleichung ϑ gefunden, so ist Winkel

$$2)\quad A = \sigma + \vartheta \text{ und } B = \sigma - \vartheta.$$

*) Auch der andere Durchschnittspunkt ließe sich zur Zeichnung des gesuchten Dreiecks benutzen; das hierdurch entstehende Dreieck ist jedoch dem Dreiecke ABC congruent.

Wir kennen nun in dem Dreiecke BCD alle Winkel und eine Seite e. Wir erhalten hieraus Seite

$$3)\quad BC = \frac{e \sin BDC}{\sin BCD} = \frac{e \sin A}{\sin 2\vartheta}$$

und $$4)\quad AC = CD = \frac{e \sin DBC}{\sin BCD} = \frac{e \sin B}{\sin 2\vartheta}.$$

Endlich berechnen wir die noch fehlende Grundlinie AB aus dem Dreiecke ABC durch die Gleichung

$$AB = \frac{AC \,.\, \sin C}{\sin B},$$

oder, wenn wir den für AC erhaltenen Werth einsetzen,

$$5)\quad AB = \frac{e \sin B \sin C}{\sin 2\vartheta \sin B} = \frac{e \sin 2\sigma}{\sin 2\vartheta},$$

indem wir um größerer Symmetrie willen sin C durch sin 2σ ersetzen,

2) Analytisch. Zufolge der Aufgabe ist

$$a - b = d.$$

Drücken wir a und b aus dem Dreiecke BCD aus, in welchem die Seite BD = e gegeben ist, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$\frac{e \sin A}{\sin 2\vartheta} - \frac{e \sin B}{\sin 2\vartheta} = d$$

oder $$e(\sin A - \sin B) = d \sin 2\vartheta.$$

Nach §§. 33 und 29 können wir hierfür auch setzen

$$2e \cos \sigma \sin \vartheta = 2d \sin \vartheta \cos \vartheta,$$

also $$\cos \vartheta = \frac{e \cos \sigma}{d}.$$

Aus dieser Gleichung geht die Proportion hervor:

$$d : e = \cos \sigma : \cos \vartheta,$$

d. h. der Unterschied der Seiten verhält sich zum Unterschiede der Segmente wie der Cosinus der halben Summe zum Cosinus der halben Differenz der Winkel an der Grundlinie.

Nachdem aus der zuletzt erhaltenen Gleichung ϑ gefunden ist, können wir die fehlenden Seiten des Dreiecks so wie in der synthetischen Auflösung berechnen. Wir können diese aber auch unmittelbar durch die gegebenen Stücke d, e und σ ausdrücken. Wenden wir nämlich auf das Dreieck ABC, in welchem der Winkel ACB = γ gegeben ist, den pythagoräischen Lehrsatz an und bezeichnen die gesuchten Seiten BC und AC mit x und y, die Grundlinie AB aber mit z, so erhalten wir die Gleichung

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma,$$

oder da nach §. 103 $(x + y) \,.\, (x - y) = e \,.\, z$

also $$z = \frac{(x - y) \,.\, (x + y)}{e} = \frac{d(x + y)}{e},$$ ferner $\cos \gamma = - \cos 2\sigma$ ist,

$$\frac{d^2 (x + y)^2}{e^2} = x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\sigma.$$

Da in dieser Gleichung x und y symmetrisch vorkommen, so wird die Rechnung vereinfacht, wenn wir zunächst ihre Summe x + y = f suchen. Setzen wir demgemäß

$$x = \frac{f + d}{2} \text{ und } y = \frac{f - d}{2},$$

so ist $x^2 + y^2 = \frac{2f^2 + 2d^2}{4}$ und $x \cdot y = \frac{f^2 - d^2}{4}$.

Hiernach verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in

$$\frac{d^2 f^2}{e^2} = \frac{2 f^2 + 2 d^2}{4} + \frac{2 (f^2 - d^2) \cos 2\sigma}{4}$$

oder $$\frac{4 d^2 f^2}{e^2} = 2f^2 (1 + \cos 2\sigma) + 2d^2 (1 - \cos 2\sigma).$$

Bekanntlich ist $1 + \cos 2\sigma = 2 \cos \sigma^2$ und $1 - \cos 2\sigma = 2 \sin \sigma^2$, wonach die vorhergehende Gleichung übergeht in:

$$\frac{d^2 f^2}{e^2} = f^2 \cos \sigma^2 + d^2 \sin \sigma^2$$

oder $$d^2 f^2 - e^2 f^2 \cos \sigma^2 = d^2 e^2 \sin \sigma^2,$$

also $$f = \frac{d\, e \sin \sigma}{\sqrt{(d^2 - e^2 \cos \sigma^2)}}.$$

Ist hieraus f gefunden, so ist $x = \frac{f + d}{2}$, $y = \frac{f - d}{2}$

und vermöge §. 103 die Grundlinie $z = \frac{df}{e}$.

Der für f erhaltene Ausdruck läßt sich in folgender Art aus der Figur bestätigen: Wenn wir uns aus B, Fig. 35, auf die verlängerte DF ein Lot BH gefällt denken und durch E mit FH eine Parallele ziehen, welche das Lot BH in K schneidet, so ist Winkel BDH $= ADF = \sigma$, folglich $BH = e \sin \sigma$, $EK = DH = e \cos \sigma$ und $BK = \sqrt{d^2 - EK^2} = \sqrt{d^2 - e^2 \cos \sigma^2}$. Da EK ∥ FH ist, so verhält sich

$$BF : BH = BE : BK,$$

d. h. wenn wir die obigen Werthe einsetzen,

$$f : e \sin \sigma = d : \sqrt{d^2 - e^2 \cos \sigma^2},$$

folglich $$f = \frac{d\, e \sin \sigma}{\sqrt{(d^2 - e^2 \cos \sigma^2)}}.$$

Diese Gleichung spricht so wie die Gleichung (1) der synthetischen Auflösung die Bedingung aus, daß $d > e \cos \sigma$ sein muß, wenn die Aufgabe überhaupt zu lösen sein soll.

In ähnlicher Art wie die vorhergehende Aufgabe lassen sich die folgenden behandeln, wenn gegeben ist:

1 und 2) Die Grundlinie, der Unterschied der Winkel an derselben und die Summe oder Differenz der Seiten;

3) Der Unterschied der Segmente, der Winkel an der Spitze und die Summe der Seiten;

4) Die Mittellinie, der Unterschied der Winkel, welche sie mit den Seiten bildet, und die Summe oder

5) die Differenz der Seiten.

§. 106. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem die Grundlinie $= c$, die Höhe $= h$ und der Winkel an der Spitze $= \gamma$ gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Man ziehe eine Linie $AB = c$, Fig 38, beschreibe über derselben einen Kreisbogen, welcher den Winkel γ faßt, errichte

in einem beliebigen Punkte der Linie AB, für das Folgende am bequemsten in der Mitte D, ein Lot DE = h, ziehe hierauf durch E mit AB eine Parallele, welche den Kreis in zwei Punkten C und G durchschneidet, und verbinde endlich einen derselben C mit A und B; dann ist ABC das verlangte Dreieck*).

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Construction.

II. Trigonometr. Auflösung. A) Synthetisch. Wir haben in der geometrischen Auflösung zunächst über AB = c einen den Winkel γ fassenden Kreisbogen beschrieben, d. h. im Wesentlichen nichts anderes, als das rechtwinklige Dreieck AMD gezeichnet, welches entsteht, wenn wir den Mittelpunkt M mit einem Endpunkte A der Grundlinie verbinden. Aus diesem rechtwinkligen Dreiecke, in welchem Winkel AMD = γ und AD = $^1/_2$c ist, ergibt sich der Radius AM, welchen wir mit r bezeichnen,

$$r = \frac{^1/_2\, c}{\sin\gamma} = \frac{c}{2\sin\gamma} \text{ und } MD = {^1/_2}\, c\, .\, \operatorname{cotg}\gamma.$$

Durch die geometrische Construction ist dann weiter das rechtwinklige Dreieck CEM entstanden. In demselben kennen wir die Hypotenuse CM = r und die Cathete ME = h — MD; wir berechnen hieraus

$$\cos CME = \frac{ME}{r},$$

oder wenn wir die oben erhaltenen Werthe einsetzen,

$$\cos CME = \frac{(h - {^1/_2}\, c\, .\, \operatorname{cotg}\gamma)\, .\, 2\sin\gamma}{c} = \frac{2\, h\sin\gamma}{c} - \cos\gamma,$$

indem bekanntlich $\operatorname{cotg}\gamma \sin\gamma = \cos\gamma$ ist. — Der Winkel CME ist in Graden ausgedrückt gleich dem Bogen CF = $^1/_2$ CG. Der Bogen CG aber ist = BC — AC, oder da der Bogen doppelt so viel Grade als der zugehörige Peripheriewinkel hat, = 2 A — 2 B, folglich Winkel CME = A — B = 2 ϑ. Setzen wir diesen Werth in die vorhergehende Gleichung ein, und ersetzen wir zugleich um größerer Symmetrie willen $\sin\gamma$ durch $\sin 2\sigma$ und $-\cos\gamma$ durch $+\cos 2\sigma$, da γ und 2σ sich zu 180^0 ergänzen, so verwandelt sich jene Gleichung in:

$$1)\quad \cos 2\vartheta = \cos 2\sigma + \frac{2\, h\sin 2\sigma}{c}.$$

Ist aus dieser Gleichung 2 ϑ gefunden, so ist

$$2)\quad A = \sigma + \vartheta \text{ und } B = \sigma - \vartheta.$$

Ziehen wir endlich noch das Lot CH = h, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken AHC und BCH

$$3)\quad AC = \frac{h}{\sin A} \text{ und } BC = \frac{h}{\sin B}.$$

B) Analytisch. Bekanntlich ist

$$h = a\sin B \text{ und } a = \frac{c\sin A}{\sin C},$$

folglich

$$h = \frac{c\sin A\sin B}{\sin C}$$

und

$$2\sin A\sin B = \frac{2\, h\sin C}{c}.$$

*) Wenn man G mit A und B verbindet, so erhält man ein mit ABC congruentes Dreieck ABG.

Nach §§. 26 und 28 ist

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

und

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B,$$

folglich, wenn wir diese Gleichungen von einander subtrahiren,

$$2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B) = \cos 2\vartheta - \cos 2\sigma.$$

Setzen wir diesen Werth in die oben erhaltene Gleichung ein, und ersetzen wir zugleich $\sin C$ durch $\sin 2\sigma$, so geht dieselbe über in

$$\cos 2\vartheta - \cos 2\sigma = \frac{2 h \sin 2\sigma}{c},$$

also

$$\cos 2\vartheta = \cos 2\sigma + \frac{2 h \sin 2\sigma}{c}.$$

Ist aus dieser Gleichung, welche mit der in der synthetischen Auflösung erhaltenen übereinstimmt, 2ϑ gefunden, so werden die noch fehlenden Stücke des Dreiecks ABC eben so wie dort berechnet.

Da jeder Cosinus $\overline{\gtrless} 1$ sein muß, so folgt aus der vorstehenden Gleichung

$$\cos 2\sigma + \frac{2 h \sin 2\sigma}{c} \overline{\gtrless} 1$$

oder

$$\frac{2 h \sin 2\sigma}{c} \overline{\gtrless} 1 - \cos 2\sigma$$

oder

$$\frac{4 h \sin\sigma \cos\sigma}{c} \overline{\gtrless} 2 \sin\sigma^2,$$

also

$$h \overline{\gtrless} \tfrac{1}{2} c \tang \sigma.$$

Wenn wir uns AF und BF gezogen denken, so ist Winkel AFB = ACB = γ, folglich Winkel AFD = $\frac{1}{2}\gamma$ und FAD = σ, also $\frac{1}{2} c \tang \sigma$ = AD tang FAD = DF. Die so eben erhaltene Bedingung läuft also darauf hinaus, daß die Höhe h des Dreiecks kleiner oder höchstens gleich der Höhe DF des Kreisabschnittes sein darf.

Man kann auch die Seiten BC und AC, welche wir mit x und y bezeichnen wollen, unmittelbar aus den gegebenen Stücken h, c und γ berechnen. Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist nämlich zunächst

$$1) \quad c^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos\gamma.$$

Eine zweite Gleichung erhalten wir, wenn wir den Inhalt des Dreiecks einmal durch $\frac{1}{2}$ hc und das anderemal durch $\frac{1}{2}$ xy sin γ ausdrücken; dann ergibt sich

$$2) \quad ch = xy \sin\gamma.$$

Wir überlassen jedoch die Auflösung dieser beiden Gleichungen dem Leser zur eigenen Uebung und bemerken nur, daß auch hier die Rechnung vereinfacht wird, wenn wir nicht sofort x und y selbst, sondern zunächst ihre halbe Summe und Differenz suchen.

§. 107. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, wenn von demselben die Grundlinie = c, die Höhe = h und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie = 2ϑ gegeben ist. (Fig. 39.)

I. Geometr. Auflösung. Wenn man mit der kleinern Seite AC um die Spitze C einen Kreis beschreibt, welcher die Grundlinie AB in D durchschneidet, ferner den Durchmesser DE zieht und A mit E verbindet, so ist, wie leicht zu sehen, AE = 2h, Winkel BAE = 90^0 und Winkel ECB = 180^0 — BCD = $180^0 - 2\vartheta$. Hat man daher zunächst aus AE = 2h und AB = c das rechtwinklige Dreieck EAB gezeichnet, so läßt sich der Punkt C durch

Benutzung eines zweifachen geometrischen Ortes bestimmen, woraus sich die folgende Construction ergibt: — Man zeichne eine Linie AB = c, errichte in dem Endpunkte derselben ein Lot AF = h und verlängere dasselbe um seine eigne Länge bis E, verbinde dann B mit E und beschreibe über BE einen Kreisbogen, welcher den Winkel $180^0 - 2\vartheta$ faßt. Wenn man nun noch durch F mit AB eine Parallele zieht, welche den Kreisbogen in C (und EB in G) durchschneidet, und C mit A und B verbindet, so ist ABC das verlangte Dreieck, wie leicht aus der vorausgeschickten Analysis hervorgeht.

II. Trigonometr. Auflösung. 1) Synthetisch. In dem zuerst gezeichneten rechtwinkligen Dreiecke BAE kennen wir beide Catheten AB = c und AE = 2h; wir berechnen hieraus den Winkel AEB, welchen wir der Kürze wegen mit φ bezeichnen, durch die Gleichung

$$1) \quad \text{tang}\,\varphi = \frac{c}{2h}.$$

Wir haben demnächst das Dreieck EMB construirt. Da zufolge dieser Construction Winkel ECB = $180^0 - 2\vartheta$ ist, so ist, wenn wir uns den durch E, C und B beschriebenen Kreis vollendet denken, ein auf dem Bogen ECB stehender Peripheriewinkel = 2ϑ, folglich der Centriwinkel EMB = 4ϑ, und da, wie leicht zu sehn, EB in G halbirt ist, Winkel EMG = 2ϑ. Daher ist in dem rechtwinkligen Dreiecke EGM

$$\cos 2\vartheta = \frac{MG}{ME} = \frac{MG}{MC}.$$

Wir kennen daher in dem Dreieck CMG das Verhältniß zweier Seiten MG : MC und den der einen gegenüberliegenden Winkel MGC, welcher = 90^0 + CGE = $90^0 + 90^0 - \varphi = 180^0 - \varphi$ ist. Wir finden daher nach dem Sinussatze

$$\sin MCG = \frac{MG}{MC} \,.\, \sin MGC = \cos 2 \sin \varphi\vartheta.$$

Der Winkel MCG ist der Nebenwinkel von MCF; der Winkel MCF aber besteht aus zwei Theilen ECF und ECM; von diesen ist
ECF = EDA = A und
ECM = $90^0 - {}^1\!/_2$EMC = 90^0 — EBC*) = 90^0 — EBA + CBA = φ + B;
demnach ist W. MCF = ECF + ECM = A + φ + B = $2\sigma + \varphi$. Da sin MCF = sin MCG ist, so erhalten wir folglich die Gleichung

$$2) \quad \sin(2\sigma + \varphi) = \cos 2\vartheta \sin \varphi.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, da φ vermöge Gleichung (1) bereits gefunden ist, der Winkel 2σ, und da ϑ gegeben ist, so erhalten wir weiter

$$3) \quad A = \sigma + \vartheta \text{ und } B = \sigma - \vartheta.$$

Wir kennen nun im Dreiecke ABC die Seite c und alle Winkel und bekommen die noch fehlenden Seiten durch die Gleichungen:

$$4) \quad BC = \frac{c \sin A}{\sin C} \text{ und } AC = \frac{c \sin B}{\sin C}.$$

B) Analytisch. Wir gehen auch hier, wie in der analytischen Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, von der Gleichung

$$h = \frac{c \sin A \sin B}{\sin C}$$

*) Der Peripheriewinkel ist die Hälfte des zugehörigen Centriwinkels.

aus, welche wir, so wie dort in die Gleichung

$$2h \sin 2\sigma = c \,.\, \cos 2\vartheta - c \,.\, \cos 2\sigma$$

oder

$$2h \sin 2\sigma + c \,.\, \cos 2\sigma = c \,.\, \cos 2\vartheta$$

umformen. Da in dieser Gleichung sowohl der Sinus als auch der Cosinus des gesuchten Winkels 2σ, aber außerdem noch ein hiervon unabhängiges Glied vorkommt, so wenden wir zur Auflösung derselben das in §. 88 angegebene Verfahren an; wir dividiren nämlich zunächst die ganze Gleichung durch 2h, also

$$\sin 2\sigma + \frac{c}{2h} \,.\, \cos 2\sigma = \frac{c}{2h} \cos 2\vartheta,$$

und suchen hierauf einen Hilfswinkel φ durch die Gleichung

$$1) \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{c}{2h}.$$

Führen wir diesen Ausdruck in die vorhergehende Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$\sin 2\sigma + \cos 2\sigma \operatorname{tang} \varphi = \cos 2\vartheta \operatorname{tang} \varphi,$$

oder wenn wir beiderseits mit $\cos \varphi$ multipliciren,

$$\sin 2\sigma \cos \varphi + \cos 2\sigma \sin \varphi = \cos 2\vartheta \sin \varphi,$$

wofür wir auch setzen können:

$$2) \quad \sin (2\sigma + \varphi) = \cos 2\vartheta \sin \varphi,$$

dieselbe Gleichung, welche wir bereits in der synthetischen Auflösung erhalten haben.

In ähnlicher Art wie die beiden vorhergehenden Aufgaben lassen sich auch die folgenden behandeln; wenn gegeben sind:

1) die Höhe, der Unterschied der Segmente der Grundlinie und der Unterschied der Winkel an derselben,

2) die Höhe, der Unterschied der Segmente der Grundlinie und der Winkel an der Spitze,

3) die beiden Segmente der Grundlinie und der Winkel an der Spitze,

4) die beiden Segmente der Grundlinie und der Unterschied der Winkel an derselben,

5) die Höhe, der Umfang und der Winkel an der Spitze,

6) die Höhe, der Umfang und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie,

7) der Radius des in das Dreieck zu zeichnenden Kreises ρ, die Grundlinie und der Winkel an der Spitze,

8) ρ, die Grundlinie und der Unterschied der Winkel an derselben,

9) ρ, der Unterschied der beiden Seiten und der Winkel an der Spitze,

10) ρ, der Unterschied der beiden Seiten und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie.

Bemerkung.

Wir haben für die meisten der im Vorhergehenden behandelten Aufgaben die Auflösung auf mehrfachen Wegen gewonnen, indem wir die fehlenden Winkel und Seiten auf synthetischem und analytischem Wege berechneten. Diese verschiedenen Wege bieten oft sehr ungleiche Schwierigkeiten dar. So viel steht jedoch fest, daß für alle Aufgaben, welche sich geometrisch lösen lassen, auch die trigonometrische Auflösung durch ein ganz analoges Verfahren gewonnen werden kann. Man hat nämlich in der That weiter nichts nöthig, als die in der geometrischen Auflösung verzeichneten Dreiecke in derselben Reihenfolge, in welcher dieselben construirt worden sind, trigonometrisch

aufzulösen. Zur Bestätigung des eben Gesagten mag noch das folgende Beispiel und können weiterhin auch die über Vierecke (§. 109—113) aufgestellten Aufgaben dienen.

Da jede trigonometrische Function durch das Verhältniß zweier Linien dargestellt, ein Winkel, von welchem eine trigonometrische Function bekannt ist, mit Leichtigkeit construirt werden kann, so läßt sich umgekehrt die Auflösung jeder Aufgabe, welche durch trigonometrische Rechnung lösbar ist, sofern hierbei nicht höhere als quadratische Gleichungen zur Anwendung kommen, auch auf dem Wege einer geometrischen Construction gewinnen. (S. auch Planimetrie §. 277 u. folg.)

§. 108. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem die Grundlinie $= c$, die Mittellinie $= t$ und der Winkel an der Spitze $= \gamma$ gegeben ist.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne über der gegebenen Grundlinie $AB = c$, Fig. 40, einen Kreisbogen, welcher den Winkel γ faßt, und um den Halbirungspunkt D der Grundlinie mit t einen Kreis, welcher den so eben beschriebenen Bogen in zwei Punkten durchschneidet. Verbindet man dann einen dieser Durchschnittspunkte C mit A und B, so ist ABC das verlangte Dreieck.

II. Trigonometr. Auflösung. Wenn wir den Mittelpunkt M des über AB beschriebenen Kreisabschnitts mit A und D verbinden, so ist Winkel $AMD = \gamma$, folglich

$$AM = \frac{c}{2 \sin \gamma} \text{ und } MD = {}^1/_2 c \operatorname{cotg} \gamma.$$

Wir sind nun auch im Stande, das Dreieck CMD aufzulösen, da wir in demselben alle drei Seiten,

$$CD = t,\ MD = {}^1/_2 c \operatorname{cotg} \gamma,\ MC = AM = \frac{c}{2 \sin \gamma}$$

kennen. Wir berechnen hieraus nach §. 68 den Winkel CMD, dessen Nebenwinkel $CME = 2\vartheta$ ist, wie wir in §. 106 gesehen haben. — Ist aber 2ϑ gefunden, so kennen wir auch, da $2\sigma = 180^0 - \gamma$ bekannt ist, die Winkel $A = \sigma + \vartheta$ und $B = \sigma - \vartheta$ und vermögen nun leicht das Dreieck ABC selbst, dessen Grundlinie $AB = c$ gegeben ist, aufzulösen.

Wir übergehen hier die analytische Berechnung der gesuchten Winkel, da dieselbe zu weitläufig ausfallen würde. Dahingegen bietet die Berechnung der Seiten, welche wir mit x und y bezeichnen, keine große Schwierigkeit dar. Vermöge §. 99, Anm. können wir nämlich zunächst die Gleichung

$$1)\quad x^2 + y^2 = 2t^2 + {}^1/_2 c^2$$

bilden und zu dieser nach dem pythagoräischen Lehrsatze die Gleichung

$$2)\quad x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma = c^2$$

hinzufügen. — Die weitere Ausrechnung dieser Gleichung überlassen wir jedoch dem Leser zur eigenen Uebung.

Weiter wollen wir noch einige Aufgaben über Dreiecke anführen, deren Auflösung sich leicht auf die im Vorhergehenden behandelten Aufgaben zurückführen läßt. — Es sei gegeben:

1) Die Grundlinie, der Winkel an der Spitze und die Summe der Quadrate der einschließenden Seiten.

Man sieht hier auf der Stelle, daß diese Aufgabe mit der zuletzt gelösten Aufgabe übereinstimmt.

2) Die Grundlinie, der Winkel an der Spitze und die Differenz der Quadrate der einschließenden Seiten.

Bezeichnen wir die fehlenden Seiten mit a und b, die Segmente der Grundlinie mit p und q, so ist bekanntlich

$$p - q = \frac{a^2 - b^2}{p + q}.$$

Da nun $p + q$ und $a^2 - b^2$ gegeben sind, so ist folglich auch $p - q$ bekannt; die obige Aufgabe ist also nicht verschieden von der Aufgabe, wenn der Winkel an der Spitze und die beiden Segmente der Grundlinie gegeben sind.

3) Die Grundlinie (c), der Winkel an der Spitze (γ) und das Rechteck der einschließenden Seiten (a . b).

Bezeichnen wir die Höhe mit h, so ist

$$ch = ab \sin \gamma,$$

indem beide Seiten dieser Gleichung den doppelten Inhalt des Dreiecks ausdrücken. Da nun c, γ, und a . b gegeben sind, so ist auch h bekannt, und es fällt daher die obige Aufgabe zusammen mit der Aufgabe, wenn Grundlinie, Höhe und Winkel an der Spitze gegeben sind.

Endlich führen wir noch die folgenden Aufgaben an, denen wir die trigonometrische Lösung hinzufügen:

4) Die Seiten eines Dreiecks zu berechnen, wenn der Inhalt des Dreiecks = J und die Winkel desselben = α, β, γ gegeben sind.

Auflösung. Bezeichnen wir die den Winkeln α, β, γ gegenüberliegenden Seiten beziehlich mit x, y, z, so erhalten wir vermöge §. 71 die Gleichung

$$J = \frac{x^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha} \text{ und hieraus } x = \sqrt{\frac{2J \sin \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}}.$$

Eben so ergibt sich $y = \sqrt{\frac{2J \sin \beta}{\sin \alpha \sin \gamma}}$ und $z = \sqrt{\frac{2J \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}}$.

5) Die Seiten eines Dreiecks zu berechnen, wenn der Inhalt des Dreiecks = J, der Winkel an der Spitze = γ und das Verhältniß der diesen Winkel einschließenden Seiten (x und y) = m : n gegeben ist.

Auflösung. Aus der Aufgabe und §. 69 ergeben sich die Gleichungen:

$$x : y = m : n \text{ und } {}^1/_2 xy \sin \gamma = J,$$

woraus $$x = m \sqrt{\frac{2J}{mn \sin \gamma}} \text{ und } y = n \sqrt{\frac{2J}{mn \sin \gamma}}$$

hervorgeht. — Zu den nämlichen Resultaten gelangt man auch, wenn man sich ein Dreieck gezeichnet denkt, welches m und n zu Seiten und γ zum Winkel an der Spitze hat. Bezeichnet man den Inhalt dieses Dreiecks mit J', so ist

$$J' = {}^1/_2 mn \sin \gamma.$$

Da aber dieses in Gedanken entworfene Dreieck dem gegebenen ähnlich ist, so verhält sich

$$J' : J = m^2 : x^2 = n^2 : y^2,$$

woraus sich ebenfalls

$$x = m \sqrt{\frac{J}{J'}} = m \sqrt{\frac{2J}{mn \sin \gamma}} \text{ und } y = n \sqrt{\frac{2J}{mn \sin \gamma}}$$

ergibt. Sind aber auf diese Art die Seiten x und y gefunden, so läßt sich die noch fehlende Grundlinie leicht nach §. 63 oder 66 erhalten.

6) Die Seiten eines Dreiecks zu berechnen, wenn das Verhältniß derselben $= m:n:p$ und der Inhalt des Dreiecks $= J$ gegeben ist.

Auflösung. Denken wir uns ein Dreieck gezeichnet, welches m, n und p zu Seiten hat, so ist dasselbe offenbar dem aufzulösenden Dreiecke ähnlich. Bezeichnen wir daher seinen Inhalt, welchen wir leicht nach §. 73 berechnen können, mit J', so erhalten wir die Proportion $J' : J = m^2 : x^2$

also
$$x = m\sqrt{\frac{J'}{J}}.$$

Eben so finden wir $y = n\sqrt{\frac{J}{J'}}$ und $z = p\sqrt{\frac{J}{J'}}$.

7) Von einem Dreiecke ist der Inhalt $= J$, der Winkel an der Spitze $= \gamma$ und die Summe der einschließenden Seiten $= f$ gegeben; es sollen hieraus diese Seiten (x, y) und die Grundlinie z berechnet werden.

Auflösung. Aus der Aufgabe ergeben sich die Gleichungen
$$x + y = f \text{ und } xy = \frac{2J}{\sin\gamma}.$$

Um des Zusammenhanges willen mit den folgenden Aufgaben verfahren wir bei der Auflösung dieser Gleichungen auf die Art, daß wir zunächst die Differenz der gesuchten Seiten $x - y$, welche wir $= d$ setzen, suchen. Dann verwandelt sich die zweite der oben angeführten Gleichungen in

$$\text{I. } f^2 - d^2 = \frac{8J}{\sin\gamma},$$

woraus sich
$$d = \sqrt{f^2 - \frac{8J}{\sin\gamma}}$$

ergibt. Nun ist die größere Seite $x = \frac{f+d}{2}$, die kleinere $y = \frac{f-d}{2}$. Zur Berechnung der Grundlinie z haben wir die Gleichung
$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma,$$
wofür wir auch setzen können:
$$\text{II. } z^2 = f^2 \sin {}^1/_2\gamma^2 + d^2 \cos {}^1/_2\gamma^2,$$
oder wenn wir den Werth von d^2 aus der Gleichung (I) einsetzen,
$$\text{III. } z^2 = f^2 - 4J \operatorname{cotg} {}^1/_2\gamma,$$
also
$$z = \sqrt{f^2 - 4J \operatorname{cotg} {}^1/_2\gamma}.$$

8) Sind von einem Dreiecke der Inhalt $= J$, der Winkel an der Spitze $= \gamma$ und der Unterschied der Seiten $x - y = d$ gegeben, so erhält man zunächst aus der Gleichung (I.) der vorhergehenden Aufgabe die Summe dieser Seiten
$$f = \sqrt{d^2 + \frac{8J}{\sin\gamma}}.$$

Setzen wir diesen Werth in die Gleichung (II.) ein, so verwandelt sich dieselbe in
$$\text{IV. } z^2 = d^2 + 4J \operatorname{tang} {}^1/_2\gamma,$$
folglich
$$z = \sqrt{d^2 + 4J \operatorname{tang} {}^1/_2\gamma}.$$

9) Die drei Seiten (x, y, z) eines Dreiecks zu berechnen, wenn der Inhalt desselben $= J$, der Umfang $= 2p$ und der Winkel an der Spitze $= \gamma$ gegeben sind.

Auflösung. Wenn wir $x + y = f$ setzen, so erhalten wir zunächst aus Gleichung (III.) $(f + z)(f - z) = f^2 - z^2 = 4J \cot ^1/_2\gamma$,
oder da $f + z = 2p$ gegeben ist,

$$p(p - z) = J \cot ^1/_2\gamma,$$

folglich

$$z = \frac{p^2 - J \cot ^1/_2\gamma}{p}$$

und

$$f = 2p - z = \frac{p^2 + J \cot ^1/_2\gamma}{p}.$$

Sind aber f und z gefunden, so läßt sich d leicht aus Gleichung (I.) oder (II.) oder (IV.) berechnen; dann ist

$$x = \frac{f + d}{2} \text{ und } y = \frac{f - d}{2}.$$

C. Vierecksaufgaben.

§. 109. Aufgabe.

Ein Viereck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem drei Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, Fig. 41, und zwei einander gegenüberliegende Winkel $ABC = \beta$ und $ADC = \delta$ gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne einen Winkel $ABC = \beta$, Fig. 42, mache $AB = a$, $BC = b$ und ziehe AC; hierauf beschreibe man über AC einen Kreisbogen, welcher den Winkel δ faßt, und um C mit c einen Kreis, welcher den so eben beschriebenen Bogen in D durchschneidet. Verbindet man dann noch den Durchschnittspunkt D mit A und C, so ist ABCD das verlangte Viereck.

II. Trigonometr. Auflösung. In dem zuerst gezeichneten Dreiecke ABC kennen wir zwei Seiten $AB = a$, $BC = b$ und den eingeschlossenen Winkel $ABC = \beta$. Bezeichnen wir die halbe Summe der fehlenden Winkel ACB und CAB mit σ und ihre halbe Differenz mit ϑ, so ist $\sigma = 90^0 - {}^1/_2\beta$, und wir erhalten ϑ nach dem Tangentensatze durch die Gleichung

$$1) \quad \tan \vartheta = \frac{(a - b) \tan \sigma}{a + b}.$$

Dann ist Winkel $ACB = \sigma + \vartheta$, $CAB = \sigma - \vartheta$, und die Seite AC ergibt sich nach dem Sinussatze durch die Gleichung

$$2) \quad AC = \frac{a \cdot \sin ABC}{\sin ACB}.$$

In dem Dreiecke ADC kennen wir jetzt zwei Seiten AC, $CD = c$ und den der einen gegenüberliegenden Winkel $ADC = \delta$; wir erhalten den der andern Seite gegenüberliegenden Winkel durch die Gleichung

$$3) \quad \sin DAC = \frac{c \cdot \sin \delta}{AC}.$$

Dann ist 4) Winkel $DCA = 180^0 - (\delta + DAC)$

und Seite 5) $AD = \dfrac{c \cdot \sin ACD}{\sin DAC}$.

Endlich ist 6) Winkel $BAD = BAC + CAD$
und Winkel $BCD = ACB + ACD$.

Wenn der um C beschriebene Kreis den Bogen des über AC beschriebenen Abschnitts in zwei Punkten D und D' durchschneidet, so existirt noch ein zweites von ABCD verschiedenes Viereck ABCD', welches ebenfalls sämmtliche gegebene Stücke enthält. — Da die Sehne CD = CD' gemacht ist, so ist auch der Bogen CD' = CD; es ergänzen sich daher die Bogen CD und CD' zu 360^0 und folglich die Peripheriewinkel CAD und CAD' zu 180^0. Hiermit übereinstimmend liefert auch die Gleichung (3) der trigonometrischen Auflösung zwei sich zu einem Flachen ergänzende Werthe für den Winkel CAD.

§. 110. Aufgabe.

Ein Viereck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem drei Winkel DAB = α, ABC = β, BCD = γ und zwei einander gegenüberliegende Seiten AB = a und CD = c, Fig. 41, gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne eine Linie AB = a, Fig. 43, lege in dem Endpunkte A den Winkel HAB = α und in B den Winkel GBA = β an; ferner lege man in einem beliebigen Punkte E der Linie BG den Winkel γ = FEB an und mache EF = c. Zieht man dann noch durch F mit BG eine Parallele und durch den Punkt D, in welchem dieselbe AH schneidet, die Linie CD parallel EF, so enthält das Viereck ABCD, wie leicht zu sehen, sämmtliche gegebene Stücke.

II. Trigonometr. Auflösung. Wenn wir die Linien AH und BG bis zu ihrem Durchschnitte in K verlängern, so kennen wir in dem entstandenen Dreiecke ABK die Seite AB = a und die ihr anliegenden Winkel BAK = $180^0 - \alpha$, ABK = $180^0 - \beta$ und folglich auch den dritten Winkel K. Wir berechnen hieraus

$$1)\quad AK = \frac{a \sin \beta}{\sin K} \text{ und } BK = \frac{a \sin \alpha}{\sin K}.$$

Eben so kennen wir in dem Dreiecke CDK eine Seite CD = c, Winkel K, Winkel C = γ und also auch den dritten Winkel CDK. Wir finden hieraus

$$2)\quad DK = \frac{c \sin \gamma}{\sin K} \text{ und } CK = \frac{c \sin D}{\sin K}.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt sich

$$3)\quad AD = DK - AK \text{ und } BC = CK - BK.$$

Die Auflösung erleidet eine sich sehr leicht ergebende Abänderung, wenn die Linien AH und BG sich unmittelbar, nicht in ihren rückwärts fortgesetzten Verlängerungen durchschneiden. Wenn aber AH und BG parallel sein, also die Winkel α und β sich zu einem Flachen ergänzen sollten, so wird die Aufgabe, wenn zugleich a = c ist, unbestimmt, wenn aber a von c verschieden sein sollte, unmöglich.

§. 111. Aufgabe.

Ein Viereck zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, von welchem zwei zusammenstoßende Seiten AB = a und AD = d, Fig. 41, der eingeschlossene Winkel DAB = α, der gegenüberliegende Winkel DCB = γ und die Diagonale, welche die Spitzen dieser Winkel verbindet, AC = g gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne zuerst das Dreieck ABD, Fig. 44, aus den beiden Seiten AB = a, AD = d und dem eingeschlossenen Winkel DAB = α, beschreibe dann über BD einen den Winkel γ fassenden

Kreisbogen und um A mit g einen Kreis; endlich verbinde man den einen Durchschnittspunkt C dieser Kreise mit B und D, so ist ABCD das verlangte Viereck.

II. Trigonometr. Auflösung. Aus dem Dreiecke ABD, in welchem wir zwei Seiten AB = a, AD = d und den eingeschlossenen Winkel DAB = α, also auch die Summe der fehlenden Winkel ABD und ADB, welche wir mit 2σ bezeichnen, kennen, berechnen wir die Differenz dieser Winkel 2ϑ durch die bekannte Gleichung

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{(a - d) \operatorname{tang} \sigma}{a + d}.$$

Dann ist Winkel $ADB = \sigma + \vartheta$, $ABD = \sigma - \vartheta$

und $$BD = \frac{a \sin \alpha}{\sin ADB}.$$

Verbinden wir den Mittelpunkt M des über BD beschriebenen Kreisabschnitts mit B und D, so ist in dem entstandenen gleichschenkligen Dreiecke BMD Winkel $BMD = 2BCD = 2\gamma$, folglich Winkel $MBD = 90^0 - \gamma$, und wenn wir den Radius MD mit r bezeichnen

$$r = \frac{BD}{2 \sin \gamma}.$$

Ziehen wir nun noch AM, so kennen wir in dem Dreiecke ABM wieder zwei Seiten AB = a, MB = r und den eingeschlossenen Winkel ABM = ABD + MBD; wir berechnen hieraus durch das vorhin angegebene Verfahren die Winkel BAM und BMA und die Seite AM; dann ist auch Winkel DMA = DMB — AMB bekannt. — Ziehen wir endlich noch AC und MC, so kennen wir in dem Dreiecke AMC alle drei Seiten AM, AC = g und MC = r; setzen wir die halbe Summe derselben = p, so erhalten wir den Winkel AMC durch die Gleichung

$$\operatorname{cotg} {}^1/_2 AMC = \sqrt{\frac{p\,(p - AC)}{(p - AM)\,(p - CM)}}.$$

Nun ist auch Winkel $BMC = 360^0 - (AMC + AMB)$ und Winkel DMC = AMC — AMD bekannt. Wir erhalten daher aus den gleichschenkligen Dreiecken BMC und DMC die noch fehlenden Seiten

$$BC = 2r \sin {}^1/_2 BMC \text{ und } CD = 2r \sin {}^1/_2 DMC.$$

Endlich ist Winkel ABC = ABM + MBC und Winkel $ADC = 360^0 - (\alpha + ABC + \gamma)$.

Zur bequemen Uebersicht der etwas weitläufigen Entwickelung wollen wir hier noch die Dreiecke in der Folge, in welcher dieselben aufgelöst worden sind, hinstellen:

1) △ BAD 2) △ DMB 3) △ ABM 4) △ AMC 5) △ BMC 6) △ DMC.

Wenn man den zweiten Durchschnittspunkt C′ der um A und M beschriebenen Kreisbogen mit B und D verbindet, so enthält das Viereck ABC′D ebenfalls alle gegebenen Stücke, ist aber dem Vierecke ABCD nicht congruent, obschon beide aus zwei congruenten Dreiecken bestehen.

§. 112. Aufgabe.

Ein Viereck, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, zu zeichnen und trigonometrisch aufzulösen, wenn von demselben zwei zusammenstoßende Seiten AB = a und BC = b, Fig. 45, und zwei an einer Seite liegende Winkel gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Da in einem Vierecke, um welches ein Kreis beschrieben werden kann, je zwei gegenüberstehende Winkel einen Flachen ausmachen und zwei an einer Seite liegende Winkel gegeben sein sollen, so sind offenbar sämmtliche Winkel des Vierecks, welche wir der Kürze wegen mit α, β, γ und δ bezeichnen wollen, bekannt. Wir ziehen nun zuerst eine Linie AB = a, Fig. 45, legen in den Endpunkten A und B die Winkel α und β an und machen den freien Schenkel BC des Winkels β gleich b. Hierauf beschreiben wir um das Dreieck ABC einen Kreis, welcher den freien Schenkel des Winkels α in D durchschneidet, und verbinden endlich C mit D: so ist ABCD das verlangte Viereck.

II. Trigonometr. Auflösung. Wir berechnen zuerst in dem Dreieck ABC, in welchem wir zwei Seiten AB = a, BC = b und Winkel ABC = β kennen, auf bekannte Weise die beiden fehlenden Winkel CAB und ACB. Verbinden wir dann den Mittelpunkt M des um das Viereck ABCD gezeichneten Kreises mit sämmtlichen Ecken desselben, so ist Centriwinkel AMB = 2ACB, Centriwinkel BMC = 2BAC, Centriwinkel DMC = 2DAC = 2(α — CAB) und Centriwinkel AMD = 2ACD = 2(γ — ACB). Bezeichnen wir nun noch der Kürze wegen den Radius des um das Viereck ABCD beschriebenen Kreises mit r, so ist in dem gleichschenkligen Dreiecke AMB

$$r = \frac{AB}{2 \sin {}^1/_2 AMB} = \frac{a}{2 \sin ACB}$$

und in den gleichschenkligen Dreiecken CMD und AMD

$$CD = 2r \sin CAD \text{ und } AD = 2r \sin ACD,$$

also, wenn wir den Werth von r einsetzen,

$$CD = \frac{a \sin CAD}{\sin ACB} \text{ und } AD = \frac{a \sin ACD}{\sin ACB}.$$

Wenn wir uns BD gezogen denken, so ist Winkel ACD = ABD und Winkel ACB = ADB; hiernach geht der für AD erhaltene Ausdruck über in

$$AD = \frac{a \sin ABD}{\sin ADB},$$

eine Gleichung, deren Richtigkeit sich auch unmittelbar aus der bloßen Betrachtung des Dreiecks ABD ergibt.

§. 113. Aufgabe.

Ein Viereck um einen Kreis zu zeichnen, dessen Radius = ρ gegeben ist, und dasselbe trigonometrisch aufzulösen, wenn außerdem noch zwei an einer Seite liegende Winkel DAB = α und ABC = β, Fig. 46, und eine dem einen anliegende Seite BC = b gegeben sind.

I. Geometr. Auflösung. Man zeichne in dem gegebenen Kreise die Centriwinkel FME = $180^0 - \alpha$ und GME = $180^0 - \beta$, ziehe durch F, E und G Tangenten, mache die durch G gehende Tangente BC = b und ziehe endlich durch C eine Tangente, welche die durch F gehende Tangente in D durchschneidet; dann ist ABCD das verlangte Viereck.

II. Trigonometr. Auflösung. Wenn wir den Mittelpunkt M mit sämmtlichen Ecken des Vierecks ABCD verbinden, so sind zunächst in dem Dreiecke ABM die Winkel an der Grundlinie MAB = $^1/_2\alpha$, MBA = $^1/_2\beta$ und die Höhe ME = ρ bekannt. In dem rechtwinkligen Dreiecke AME ist

$$AM = \frac{\rho}{\sin {}^1/_2\alpha};$$

und in dem Dreiecke AMB ist

$$AB = \frac{AM \sin AMB}{\sin {}^1/_2\beta} = \frac{AM \sin {}^1/_2(\alpha + \beta)}{\sin {}^1/_2\beta},$$

oder wenn wir den Werth von AM einsetzen,

$$1)\quad AB = \frac{\rho \sin {}^1/_2(\alpha + \beta)}{\sin {}^1/_2\alpha \sin {}^1/_2\beta}.$$

Ferner ist in dem rechtwinkligen Dreiecke BGM

$$GB = \rho \operatorname{cotg} {}^1/_2\beta,$$

folglich $CG = BC - BG = b - \rho \operatorname{cotg} {}^1/_2\beta$,

und in dem rechtwinkligen Dreiecke MGC, wenn wir der Kürze wegen Winkel DCB $= \gamma$ setzen,

$$2)\quad \operatorname{tang} {}^1/_2\gamma = \frac{\rho}{CG} = \frac{\rho}{b - \rho \operatorname{cotg} {}^1/_2\beta}.$$

Da wir jetzt in dem Vierecke ABCD drei Winkel kennen, so ist auch der vierte Winkel ADC, welchen wir mit δ bezeichnen wollen, bekannt. Wir finden nun durch ein ganz ähnliches Verfahren wie dasjenige, welches wir bei dem Dreiecke AMB angewendet haben, aus den Dreiecken CMD und AMD

$$3)\quad CD = \frac{\rho \sin {}^1/_2(\gamma + \delta)}{\sin {}^1/_2\gamma \sin {}^1/_2\delta} \quad \text{und} \quad 4)\quad AD = \frac{\rho \sin {}^1/_2(\alpha + \delta)}{\sin {}^1/_2\alpha \sin {}^1/_2\delta}.$$

In ähnlicher Art wie die vorhergehenden Aufgaben lassen sich die den Abschnitten 5, 6 und 8 der Planimetrie beigefügten Uebungsaufgaben über Vierecke behandeln. Außerdem enthält auch noch der folgende Abschnitt ein paar vollständig durchgeführte Beispiele.

Vierter Abschnitt.

Anwendungen der Trigonometrie auf die Feldmeßkunst.

§. 114. Aufgabe.

Die Entfernung zweier Punkte auf dem Felde A und B, Fig. 47, zu finden, wenn wegen eines zwischen denselben befindlichen Hindernisses die directe Messung nicht ausführbar ist.

Auflösung. Man nehme auf dem Felde einen dritten Punkt C an, messe die Linien AC und BC und den Winkel ACB; dann kennt man in dem Dreiecke ABC zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel und kann nun die dritte Seite AB nach §§. 62 oder 66 berechnen.

Wir fügen dieser Aufgabe kein Beispiel in bestimmten Zahlen bei, da das Verfahren schon bei den oben angeführten Paragraphen durch Beispiele erläutert worden ist. Aehnliches gilt von mehreren der folgenden Aufgaben.

§. 115. Aufgabe.

Die Entfernung zweier Punkte A und B, Fig. 47, auf dem Felde zu finden, wenn nur einer derselben A zugänglich, der andere B unzugänglich ist.

Auflösung. Man nehme wieder auf dem Felde einen dritten Punkt C an, messe die Linie AC und die Winkel BAC und BCA; dann kennt man in dem Dreiecke ABC eine Seite AC und zwei Winkel A und C, folglich auch den dritten Winkel ABC $= 180^0 - (A + C)$; man erhält daher die Seite AB durch die Gleichung

$$AB = \frac{AC \sin C}{\sin B}.$$

§. 116. Aufgabe.

Die Größe einer Linie AB, Fig. 48, auf dem Felde zu finden, wenn beide Endpunkte derselben A und B unzugänglich sind.

Auflösung. Man messe auf dem Felde (in der nämlichen Ebene mit AB) eine willkürliche Standlinie CD, in C die Winkel ACD und BCD und in D die Winkel ADC und BDC; dann läßt sich aus diesen gemessenen Stücken die gesuchte Linie AB in folgender Art berechnen: Aus dem Dreiecke ACD, in welchem man eine Seite CD und zwei Winkel ACD und ADC, also auch den dritten Winkel CAD kennt, ergibt sich

$$1)\quad AC = \frac{CD \cdot \sin ADC}{\sin CAD}.$$

Eben so kennt man in dem Dreiecke BCD die Seite CD und die beiden Winkel BCD und BDC, also auch den dritten Winkel CBD; man findet hieraus

$$2)\quad BC = \frac{CD \cdot \sin BDC}{\sin CBD}.$$

Jetzt sind in dem Dreiecke ABC zwei Seiten AC und BC und der eingeschlossene Winkel ACB = ACD — BCD bekannt; es ergibt sich daher die dritte Seite durch die Gleichung

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos ACB},$$

welcher man auch, um bequemer mit Logarithmen zu rechnen, die folgende Form

$$3)\quad AB = AC \sqrt{1 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 - 2 \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \cos ACB}$$

geben kann.

Man sieht auf der Stelle, daß sich die angegebene Auflösung auch dahin abändern läßt, daß man erst aus den Dreiecken ACD und BCD die Seiten AD und BD, und dann hieraus und aus dem Winkel ADB die Seite AB berechnet, was jedoch von dem vorhin ausgeführten Verfahren nicht wesentlich verschieden ist.

Endlich wollen wir noch bemerken, daß der Gang der obigen Auflösung in der Hauptsache auch dann noch der nämliche bleibt, wenn die Punkte A und B, deren Entfernung gesucht wird, nicht an derselben Seite, sondern an entgegengesetzten Seiten der Standlinie CD liegen sollten.

Es sei gegeben $CD = 2749$

$ACD = 117^0\ 28'$ $\quad BDC = 109^0\ 43'$

$BCD = 32^0\ 17'$ $\quad ADC = 41^0\ 12'$

dann ist: $ACB = 85^0\ 11'$, $CAD = 21^0\ 20'$, $CBD = 38^0\ 0'$.

Wir suchen zunächst nach Gleichung (1) und (2) log AC und log BC, (nicht AC und BC selbst).

log CD = 3,43917		log CD = 3,43917	
log sin ADC = 9,81868 — 10		log sin BDC = 9,97376 — 10	
13,25785 — 10		13,41293 — 10	
log sin CAD = 9,56085 — 10		log sin CBD = 9,78934 — 10	
log AC = 3,69700		log BC = 3,62359	

Vor der Berechnung von AB nach Gleichung (3) haben wir noch das Glied $\left(\frac{BC}{AC}\right)^2$, welches wir mit u^2 und das Glied $2 \cdot \left(\frac{BC}{AC}\right) \cdot \cos ACB$, welches wir mit w bezeichnen, zu suchen. Wir finden diese Ausdrücke durch die folgende Rechnung:

log BC = 4,62359 — 1	log 2 = 0,30103
— log AC = 3,69700	log u = 0,92659 — 1
log u = 0,92659 — 1 | 2)	log cos ACB = 8,92411 — 10
log u^2 = 0,85318 — 1	log w = 0,15173 — 1
u^2 = 0,7131	w = 0,1418

Demnach ist $1 + u^2 - w = 1 + 0{,}7131 - 0{,}1418 = 1{,}5713$.

Bezeichnen wir dieses Resultat mit z, so ist

$$AB = AC \sqrt{z}$$

und die weitere Rechnung folgende:

log z	=	0,19618 | 2)
		0,09809
+ log AC	=	3,69700
log AB	=	3,79509
AB	=	6239.

§. 117. Aufgabe.

Die Entfernung des Mondes von der Erde zu finden.

Auflösung. Es seien A und B, Fig. 50, zwei unter dem nämlichen Meridiane in möglichst weiter Entfernung von einander liegende Orte der Erdoberfläche, C und D die Mittelpunkte der Erde und des Mondes. Da beide Orte A und B unter demselben Meridiane liegen, so geht der Mittelpunkt des Mondes in dem nämlichen Augenblicke durch den gemeinschaftlichen Meridian derselben, so daß dann die vier Punkte A, C, B und D in der nämlichen Ebene liegen. In diesem Momente werden von zwei in A und B befindlichen Beobachtern die Zenithdistanzen α und β gemessen. Da nun überdies in dem Vierecke ACDB die Seiten AC und BC gleich dem Radius der Erde sind, welchen wir mit r bezeichnen wollen, und der Winkel ACB, welchen wir gleich γ setzen, wenn die Orte A und B zu beiden Seiten des Aequators liegen, gleich der Summe ihrer Abstände vom Aequator, d. h. ihrer geographischen Breiten ist, so kennt man in dem Vierecke ACDB fünf Stücke, Winkel α, β und γ und zwei zusammenstoßende Seiten AC und BC, woraus sich die gesuchte Diagonale CD in folgender Art berechnen läßt:

Man suche zunächst die Winkel ADC = x und BDC = y. Die Summe dieser Winkel ist, wie leicht zu sehen, $= \alpha + \beta - \gamma$, also ihre halbe Summe,

$$1) \quad \sigma = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}.$$

Da hiernach die Summe der Winkel x und y bekannt ist, so handelt es sich nur noch darum, ihre Differenz zu finden, welche wir mit 2ϑ

bezeichnen. Zu diesem Zwecke suchen wir eine Gleichung zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken zu bilden. Wir erhalten eine solche, indem wir die den Dreiecken ACD und BCD gemeinschaftliche Seite CD aus beiden ausdrücken. In dem Dreiecke ACD ist

$$CD = \frac{r \sin \alpha}{\sin x}$$

und in dem Dreiecke BCD ist $CD = \frac{r \sin \beta}{\sin y}$.

Setzen wir diese Werthe einander gleich, so erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{r \sin \alpha}{\sin x} = \frac{r \sin \beta}{\sin y},$$

also

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Nach einem bekannten Satze der Proportionen folgt hieraus

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin y + \sin y} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta},$$

wofür wir nach §. 33 auch setzen können

$$\frac{2 \cos {}^1/_2(x + y) \sin {}^1/_2(x - y)}{2 \sin {}^1/_2(x + y) \cos {}^1/_2(x - y)} = \frac{2 \cos {}^1/_2(\alpha + \beta) \sin {}^1/_2(\alpha - \beta)}{2 \sin {}^1/_2(\alpha + \beta) \cos {}^1/_2(\alpha - \beta)}.$$

oder $\operatorname{cotg} {}^1/_2(x + y) \operatorname{tang} {}^1/_2(x - y) = \operatorname{cotg} {}^1/_2(\alpha + \beta) \operatorname{tang} {}^1/_2(\alpha - \beta)$, da die Cotangente die Reciproke der Tangente ist, so läßt sich diese Gleichung mit Benutzung der oben angegebenen abkürzenden Bezeichnung umformen in

$$\frac{\operatorname{tang} \vartheta}{\operatorname{tang} \sigma} = \frac{\operatorname{tang} {}^1/_2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tang} {}^1/_2(\alpha + \beta)}.$$

Da die Winkel σ und ϑ wegen der beträchtlichen Entfernung des Mondes von der Erde nur klein sind und zufolge §. 17 das Verhältniß der Tangenten kleiner Winkel von dem der Winkel selbst nur um ein Geringes verschieden ist — die dem Buche angehängte Tabelle zeigt, daß diese Regel noch bis zu Winkeln von 5^0 zutrifft — so werden wir ohne erheblichen Fehler die vorstehende Gleichung vereinfachen*) können in

$$\frac{\vartheta}{\sigma} = \frac{\operatorname{tang} {}^1/_2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tang} {}^1/_2(\alpha + \beta)},$$

also

$$2)\quad \vartheta = \frac{\sigma \,.\, \operatorname{tang} {}^1/_2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tang} {}^1/_2(\alpha + \beta)}.$$

Haben wir aber aus dieser Gleichung ϑ gefunden, so ist

$$3)\quad x = \sigma + \vartheta \text{ und } y = \sigma - \vartheta$$

bekannt; wir erhalten nun die gesuchte Entfernung durch die Gleichung

$$4)\quad CD = \frac{r \sin \alpha}{\sin(\sigma + \vartheta)} \text{ oder } = \frac{r \sin \beta}{\sin(\sigma - \vartheta)}.$$

Um die Entfernung des Mondes von der Erde zu finden, wurden in den Jahren 1751 und 1752 von den beiden Astronomen Lalande in Berlin und Lacaille am

---

*) Diese Vereinfachung ist für uns um so erwünschter, da unsere Logarithmentafel nur bis zu den Minuten hinabgeht, aber keine Secunden enthält und das bei größern Winkeln anzuwendende Intropolationsverfahren bei kleinen Winkeln nicht zulässig ist, indem bei diesen das Verhältniß der Zuwachse der Logarithmen der Tangenten von dem Verhältnisse der Zuwachse der Winkel sehr verschieden ist.

Cap der guten Hoffnung correspondirende Beobachtungen angestellt. Die südliche Breite der Beobachtungsstation (A) am Cap und die nördliche Breite der Beobachtungsstation (B) in Berlin waren

$$A = 33^0\,56'\,\,3''$$
$$B = 52^0\,30'\,16''$$

folglich
$$\gamma = 86^0\,26'\,19''.$$

Die beiden Astronomen erhielten unter andern aus ihren am 6. December 1751 angestellten Beobachtungen
$$\alpha = 46^0\,47'\,16''$$
$$\beta = 41^0\,\,0'\,17''$$

folglich
$$\alpha + \beta = 87^0\,47'\,33'',$$
und
$$\alpha - \beta = \,\,5^0\,46'\,49'',$$

also, wenn wir halbe Secunden vernachlässigen,
$$\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 43^0\,53'\,46''$$
$$\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \,\,2^0\,53'\,29''$$

endlich
$$2\sigma = \alpha + \beta - \gamma = \,\,1^0\,21'\,14'',$$
folglich
$$\sigma = 10'\,37'' = 2437''.$$

Wir finden nun zunächst ϑ durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \log \sigma &= 3{,}38686 \\ + \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) &= 8{,}70335 \\ &\quad 12{,}09021 \\ - \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) &= 9{,}98326 \\ \log \vartheta &= 2{,}10695 \\ \vartheta &= 128'' = 2'\,8''. \end{aligned}$$

(Da unsere Tafel keine Secunden enthält, so haben wir bei der Bestimmung von log tang $2^0\,53'\,29''$ das folgende Interpolationsverfahren angewendet: Wie wir aus der Tafel ersehn, nehmen die Logarithmen der Tangenten in der Gegend von $2^0\,53'$ mit dem Winkel ziemlich gleichmäßig zu und zwar von $43^0\,53'$ bis zu $43^0\,54'$ um 251 in den drei letzten Decimalstellen. Wir bilden demgemäß folgendes Regeldetri-Exempel: Bei einem Zuwachs von 60 Secunden nimmt log tang $2^0\,53'$ um 251 zu, um wie viel wird dieser Logarithmus wachsen, wenn der Winkel um 29 Secunden vergrößert wird? — Antwort: um

$$\frac{251\,.\,29}{60} = 121.$$

Demnach ist
$$\begin{aligned} \log \operatorname{tang} 2^0\,53'\,29'' &= 8{,}70214 \\ &\quad + 121 \\ &\quad 8{,}70335. \end{aligned}$$

In ganz ähnlicher Art ist log tang $43^0\,53'\,46''$ erhalten werden).

Nachdem wir ϑ gefunden haben, ergibt sich uns

$$x = \sigma + \vartheta = 42'\,45'' \text{ und } y = \sigma - \vartheta = 38'\,29''.$$

Wir erhalten nun den gesuchten Abstand des Mondes von der Erde, nach Gleichung (4), indem wir den Radius der Erde zu 859,5 Meilen annehmen, durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \log r &= 2{,}93425 \\ + \log \sin \alpha &= 9{,}86262 \\ &\quad 12{,}79687 \\ - \log \sin x &= 8{,}09465 \\ \log CD &= 4{,}70222 \\ CD &= 50380. \end{aligned}$$

(Bei der Bestimmung von log sin α haben wir das vorhin angegebene Interpolationsverfahren angewendet; dieses erscheint jedoch bei log sin x als unzulässig, da die Logarithmen der Sinus sehr kleiner Winkel, wie die Tafel ausweist, bei gleichem Zuwachsen der Winkel nichts weniger als gleichmäßig zunehmen. Wie wir dagegen in §. 17 gesehen haben, wachsen die Sinus selbst sehr nahe in gleichem Verhältnisse mit den Winkeln; wir können daher, indem wir 42′ 45″ = 2565″ und 42′ = 2520″ setzen, folgende Proportion aufstellen:

$$\sin 42' \, 45'' : \sin 42' = 2565 : 2520,$$

also

$$\sin 42' \, 45' = \frac{\sin 42' \, . \, 2565}{2520}$$

und log sin 42′ 45″ = log sin 42′ + log 2565 — log 2520. Wir erhalten hiernach

$$\begin{aligned} \log \sin 42' &= 8{,}08696 \\ + \log 2565 &= 3{,}40909 \\ &\overline{11{,}49605} \\ - \log 2520 &= 3{,}40140 \\ \log \sin 42' \, 45'' &= \overline{8{,}09465.} \end{aligned}$$

Die Rechnung für diese Aufgabe ist zwar etwas weitläuftig geworden, aber nicht ohne nützliche Belehrung geblieben).

Die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde beträgt 51800 Meilen; die Abweichung unseres Resultats hiervon hat nichts Befremdliches, da die Entfernung des Mondes von der Erde in der Erdnähe bis auf 48950 Meilen herabgeht, während sie in der Erdferne bis auf 54650 Meilen steigt.

§. 118. Aufgabe.

Die Höhe AB eines Punktes A, Fig. 51, (z. B. der Spitze eines Thurmes oder des Gipfels eines Berges) über der durch einen gegebenen Punkt C gehenden horizontalen Ebene zu finden.

Auflösung. Wenn von dem gegebenen Punkte C aus eine horizontale Linie nach dem Fußpunkte B, in welchem die zu messende Höhe die durch den gegebenen Punkt C gehende Horizontalebene trifft, gemessen werden kann, so ist die Aufgabe bereits in §. 49, b gelöst worden.

Wir fassen die Aufgabe hier allgemeiner auf, indem wir annehmen, daß von dem gegebenen Punkte aus überhaupt nicht in horizontaler Richtung gemessen werden kann. In diesem Falle messen wir von C aus eine beliebige Standlinie CD = a und den Winkel CDE = ν, unter welchem dieselbe gegen den Horizont geneigt ist, ferner den Elevationswinkel ACB = ε und die horizontalen Winkel FDE = α und FED = β*). Dann ist zunächst in dem rechtwinkligen Dreiecke CED

$$DE = a \cos \nu,$$

ferner in dem Dreiecke DEF

$$EF = \frac{DE \sin \alpha}{\sin DFE},$$

oder wenn wir den Werth von DE einsetzen und sin DFE durch sin $(\alpha + \beta)$ ersetzen,

$$EF = \frac{a \cos \nu \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

---

*) Wie die horizontalen Winkel EDF und DEF, nicht aber die in einer schiefen Ebene liegenden Winkel BDC und BCD mit den Theodolithen gemessen werden können, überlassen wir der mündlichen Erklärung des Lehrers, dem wir es auch anheimgeben müssen, die Schüler mit der Einrichtung dieses Instrumentes bekannt zu machen.

Endlich ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC, wenn wir die gesuchte Höhe AB mit x bezeichnen,

$$x = BC \tan \varepsilon = EF \tan \varepsilon,$$

oder wenn wir den Werth von EF einsetzen,

$$x = \frac{a \cos \nu \sin \alpha \tan \varepsilon}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

§. 119. Aufgabe.

Die Lage eines Punktes D, an welchem man sich befindet zu bestimmen, wenn man aus demselben drei mit ihm in der nämlichen Ebene liegende Punkte A, B und C, Fig. 52, von bekannter Lage sehen, aber nicht nach denselben messen kann.

Auflösung. Da nach der Annahme die Punkte A, B und C von D aus gesehen werden können, so ist man im Stande, die Winkel BDC und ADC, welche wir mit α und β bezeichnen wollen, zu messen. Da nun überdies die gegenseitige Lage der Punkte A, B und C als bekannt vorausgesetzt ist, so kennt man auch noch die Linien BC und AC, welche wir der Kürze wegen mit a und b, und den Winkel ACB, welchen wir mit γ bezeichnen. Man kennt daher überhaupt in dem Vierecke ABCD fünf Stücke und kann nun zunächst den gesuchten Punkt D durch geometrische Construction finden, indem man über BC als Sehne einen Kreisbogen, welcher den Winkel α faßt, und über AC einen den Winkel β fassenden Kreisbogen beschreibt. Diese beiden Bogen schneiden sich in dem gesuchten Punkte D.

Durch trigonometrische Rechnung wird die Lage des gesuchten Punktes D in folgender Art bestimmt:

Man sucht zuerst die Winkel CAD und CBD, welche wir x und y nennen, zu berechnen. Die Summe dieser Winkel $x + y$ ist bekannt, nämlich $= 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$. Bezeichnen wir also der Kürze wegen diese bekannte Summe mit 2σ, so ist

$$1) \quad \sigma = \frac{360^0 - (\alpha + \beta + \gamma)}{2}.$$

Um die Differenz der Winkel x und y, welche wir mit 2ϑ bezeichnen, zu berechnen, suchen wir eine Gleichung zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken zu bilden. Wir gelangen hierzu, indem wir die den beiden Dreiecken ACD und BCD gemeinschaftliche Seite CD aus beiden ausdrücken. In dem Dreiecke ACD ist

$$CD = \frac{b \sin x}{\sin \beta}$$

und in dem Dreiecke BCD ist

$$CD = \frac{a \sin y}{\sin \alpha}.$$

Setzen wir diese Werthe einander gleich, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{b \sin x}{\sin \beta} = \frac{a \sin y}{\sin \alpha} \text{ oder } \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}.$$

Wenden wir einen bekannten Satz der Proportionen an, so ergibt sich hieraus weiter

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{a \sin \beta - b \sin \alpha}{a \sin \beta + b \sin \alpha}.$$

Da $x = \sigma + \vartheta$ und $y = \sigma - \vartheta$ ist, so geht diese Gleichung, wenn wir §. 33 benutzen, über in:

$$\frac{2 \cos \sigma \sin \vartheta}{2 \sin \sigma \cos \vartheta} = \frac{a \sin b - b \sin \alpha}{a \sin b + b \sin \alpha}$$

oder
$$\frac{\operatorname{tang} \vartheta}{\operatorname{tang} \sigma} = \frac{a \sin \beta - b \sin \alpha}{a \sin \beta + b \sin \alpha},$$

also
$$2)\quad \operatorname{tang} \vartheta = \frac{a \sin \beta - b \sin \alpha}{a \sin \beta + b \sin \alpha} \cdot \operatorname{tang} \sigma$$

Hat man aus dieser Gleichung ϑ gefunden, so sind auch $x = \sigma + \vartheta$ und $y = \sigma - \vartheta$ bekannt. Man erhält dann leicht weiter

$$3)\quad CD = \frac{a \sin y}{\sin \alpha} = \frac{b \sin x}{\sin \beta},$$

$$4)\quad AD = \frac{b \sin ACD}{\sin \beta} \text{ und } 5)\quad BD = \frac{a \sin BCD}{\sin \alpha}.$$

Das oben zur Bestimmung des Punktes D angegebene Verfahren stellt sich jedoch als unzulänglich heraus, wenn der Punkt D auf dem durch die drei Punkte A, B und C gehenden Kreise liegt. Die geometrische Construction führt nicht zum Ziele, indem die über AC und BC zu beschreibenden Kreisbogen sich nicht schneiden, sondern zusammenfallen; und die trigonometrische Auflösung wird unbrauchbar, da in einem Vierecke, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, zwei gegenüberstehende Winkel zusammen einen Flachen betragen, folglich $\sigma = 90^0$ und in der Gleichung (2) $\operatorname{tang} \sigma = \infty$ wird.

Die so eben behandelte Aufgabe ist eine der schönsten und wichtigsten der praktischen Geometrie und unter dem Namen der Pothenot'schen Aufgabe bekannt. — Wir fügen für dieselbe folgendes Beispiel in bestimmten Zahlen bei:

Es sei gegeben $a = 725$, $b = 569$, $\alpha = 43^0\, 24'$, $\beta = 39^0\, 47'$ und $\gamma = 132^0\, 35'$; dann ist zunächst vermöge Gleichung (1) $\sigma = 72^0\, 7'$. Um die Berechnung von $\operatorname{tang} \vartheta$ nach Gleichung (2) mit größerer Deutlichkeit auszuführen, setzen wir $a \sin \beta = u$ und $b \sin \alpha = v$.

Wir erhalten u und v durch folgende Rechnung

$\log a$	$= 2{,}86034$	$\log b$	$= 2{,}75511$
$\log \sin \beta$	$= 9{,}80610 - 10$	$\log \sin \alpha$	$= 9{,}83701 - 10$
$\log u$	$= 2{,}66644$	$\log v$	$= 2{,}59212$
u	$= 463{,}9$	v	$= 390{,}9.$

Demnach ist $u + v = 854{,}8$ und $u - v = 73{,}0$.

Wir können nun der Gleichung (2) folgende Form geben:

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{(u - v) \operatorname{tang} \sigma}{u + v},$$

wir finden daher ϑ, indem wir in dieser Art weiter rechnen:

$$\begin{aligned} \log (u - v) &= 1{,}86332 \\ + \log \operatorname{tang} \sigma &= 0{,}49124 \\ & 12{,}35456 - 10 \\ - \log (u + v) &= 2{,}93186 \\ \log \operatorname{tang} \vartheta &= 9{,}42270 - 10 \\ \vartheta &= 14^0\, 49' \end{aligned}$$

also $x = \sigma + \vartheta = 86^0\, 56'$ und $y = \sigma - \vartheta = 57^0\, 18'$.

Endlich wollen wir CD nach Gleichung (3) berechnen:

$$
\begin{aligned}
+ \log \sin y &= 9{,}92506 - 10 \\
\log a &= 2{,}86034 \\
\hline
& 12{,}78540 - 10 \\
- \log \sin \alpha &= 9{,}83701 - 10 \\
\hline
\log CD &= 2{,}94839 \\
CD &= 888{,}0.
\end{aligned}
$$

Für solche Leser, welche häufig in den Fall kommen, trigonometrische Rechnungen auszuführen, bemerken wir noch: — Wenn in dem Quotienten

$$\frac{u - v}{u + v}$$

nicht u und v unmittelbar, sondern, wie im obigen Beispiele ihre Logarithmen bekannt sind, so läßt sich der Logarithmus dieses Bruches am raschesten durch folgendes Verfahren erhalten: — Man suche einen Hilfswinkel φ nach der Gleichung

$$\text{I.} \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{v}{u};$$

dann ist

$$\frac{u - v}{u + v} = \frac{1 - \operatorname{tang} \varphi}{1 + \operatorname{tang} \varphi} = \frac{\operatorname{tang} 45^0 - \operatorname{tang} \varphi}{1 + \operatorname{tang} 45^0 \,.\, \operatorname{tang} \varphi},$$

indem bekanntlich $\operatorname{tang} 45^0 = 1$ ist. Nach §. 31 können wir aber hier auch setzen:

$$\text{II.} \quad \frac{u - v}{u + v} = \operatorname{tang} (45^0 - \varphi).$$

Substituiren wir diesen Werth in die obige Gleichung (2), so verwandelt sich dieselbe in:

$$\operatorname{tang} \vartheta = \operatorname{tang} (45^0 - \varphi) \,.\, \operatorname{tang} \sigma,$$

und die Rechnung ist nun folgende:

$$
\begin{aligned}
\log v &= 2{,}59212 \\
- \log u &= 2{,}66644 \\
\hline
\log \operatorname{tang} \varphi &= 9{,}92568 - 10 \\
\varphi &= 40^0\ 7', \text{ also } 45^0 - \varphi = 4^0\ 53' \\
\log \operatorname{tang} (45^0 - \varphi) &= 8{,}93165 - 10 \\
+ \log \operatorname{tang} \sigma &= 0{,}49124 \\
\hline
\log \operatorname{tang} \vartheta &= 9{,}42289 - 10.
\end{aligned}
$$

Wir haben oben $\log \operatorname{tang} \vartheta = 9{,}42270$ gefunden; beide Angaben weichen in den letzten Decimalstellen von einander ab, was sich leicht daraus erklärt, daß wir beim Gebrauch der Logarithmentafel nicht mit ganz genauen Zahlen, sondern mit Näherungswerthen rechnen.

Fünfter Abschnitt.

Polygonometrie.

A. Umformung der Coordinaten.

§. 120. Erklärung.

So wie die Trigonometrie die gegenseitige Abhängigkeit der Seiten und Winkel eines Dreiecks durch trigonometrische Gleichungen darstellt, so beschäftigt sich die Polygonometrie mit der Auflösung dieser Aufgabe für Vielecke überhaupt.

Man gelangt hierzu am bequemsten, indem man in der Ebene des Vielecks zwei sich senkrecht durchschneidende Axen annimmt und die Ecken des Vielecks durch ihre Abscissen und Ordinaten feststellt. Ehe wir jedoch hierzu übergehen, schicken wir noch einige für die Auflösung der angeführten Aufgabe unentbehrliche Sätze über Coordinaten überhaupt voraus.

Bemerkung.

Da die Lage der Coordinatenaxen eine ganz willkürliche ist, so muß es frei stehen, jede zwei sich senkrecht durchschneidende Linien als Axen anzunehmen. Andererseits ist klar, daß mit der sich ändernden Lage der Coordinatenaxen auch die Abscisse und Ordinate eines jeden auf diese Axen bezogenen Punktes ihre Werthe ändern. Wir beschränken uns jedoch hier auf den Fall, welcher für die polygonometrischen Entwickelungen ausreicht, daß die in Betracht zu ziehenden Axenpaare einander parallel laufen.

§. 121. Lehrsatz.

Wenn man eine feste Linie AX, Fig. 53 und 54, als Abscissenaxe und das einemal eine zu derselben senkrechte Linie AY, welche sie im Punkte A durchschneidet, ein anderesmal die Senkrechte A′Y′, welche die Abscissenaxe in einem andern Punkte A′ durchschneidet, als Ordinatenaxe annimmt, so ist für jeden willkürlichen Punkt die Ordinate in beiden Fällen dieselbe, die Abscisse dagegen eine verschiedene. Bezeichnen wir mit x die Abscisse irgend eines Punktes für den ersten Anfangspunkt A, mit x′ die Abscisse desselben Punktes für den zweiten Anfangspunkt A′ und mit p die Abscisse des zweiten Anfangspunktes A′ in Beziehung auf den ersten Anfangspunkt A, so ist allemal

$$x = p + x'.$$

Beweis. Es sei zunächst, Fig. 53, p positiv $= + AA'$; dann ist

1) für den Punkt C, (für welchen x und x′ beide positiv sind),

$$x = + AD \text{ und } x' = + A'D,$$

folglich $$p + x' = AA' + A'D = AD = x.$$

2) für den Punkt E, (für welchen x positiv, aber x′ negativ ist)

$$x = + AF, x' = - A'F,$$

folglich $$p + x' = AA' - A'F = + AF = x,$$

3) für den Punkt G, (für welchen x und x′ beide negativ sind),

$$x = - AH \text{ und } x' = - A'H,$$

folglich $$p + x' = + AA' - A'H = - AH = x.$$

Ist zweitens p negativ $= - AA'$, Fig. 54, so haben wir wieder die nämlichen drei verschiedenen Lagen des festzustellenden Punktes wie im vorhergehenden Hauptfalle zu unterscheiden. Es ist dann

1) für den Punkt C $x = + AD$ und $x' = + A'D$,

folglich $$p + x, = - AA' + A'D = + AD = x.$$

2) für den Punkt E $x = - AF$ und $x' = + A'F$,

folglich $$p + x' = - AA' + A'F = - AF = x.$$

3) für den Punkt G $x = - AH$ und $x' = - A'H$,

folglich $$p + x' = - AA' - A'H = - AH = x.$$

Außer den oben erörterten Fällen kann der festzustellende Punkt auch noch in einer der beiden Ordinatenaxen liegen, also x oder $x' = o$ sein. Wir haben jedoch diese leicht zu erledigenden Fälle, um nicht zu weitläufig zu werden, übergangen.

§. 122. Zusatz.

So wie wir im vorhergehenden Paragraphen den Anfangspunkt der Coordinaten in der Abscissenaxe verlegt haben, so kann man denselben auch in der Ordinatenaxe verlegen. Bezeichnen wir dann die Ordinate eines dritten Punktes für den einen Anfangspunkt mit y, für den andern mit y′, ferner die Ordinate des letztern Anfangspunktes für den erstern mit q, so ist

$$y = q + y'.$$

Der Beweis ist der nämliche wie der des vorhergehenden §.

§. 123. Lehrsatz.

Wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten A, Fig. 55, in irgend einen andern Punkt A′ verlegt und die Coordinaten eines dritten Punktes C für den Anfangspunkt A mit x und y, für den andern Anfangspunkt A′ mit x′ und y′, ferner die Coordinaten des zweiten Anfangspunktes für den ersten mit p und q bezeichnet, so ist

$$x = p + x' \text{ und } y = q + y'.$$

Beweis. Wenn wir den Durchschnittspunkt der zweiten Ordinatenaxe und der ersten Abscissenaxe mit A″ bezeichnen und zunächst den Anfangspunkt von A nach A″ verlegen, so bleibt fürs erste die Ordinate unverändert, die Abscisse dagegen geht nach §. 121 über in

$$x' = x - p.$$

Verlegen wir dann ferner den Anfangspunkt von A″ nach A′, so ändert sich die Abscisse nicht weiter, dagegen verwandelt sich die Ordinate nach §. 122 in

$$y' = y - q.$$

Wenn in einer Linie drei Punkte C, A und B, Fig. 1, gegeben sind, und wir bezeichnen den Abstand des Punktes A von C mit a, den Abstand des Punktes B von A mit b und den Abstand des Punktes B von C mit c, so ist

$$c = a + b.$$

Diese Gleichung gilt jedoch nur für den in der Figur dargestellten Fall; sie verliert ihre Richtigkeit, wenn die Punkte A, B und C eine andere Lage haben, z. B. der Punkt B zwischen C und A oder in der über C fortgesetzten Verlängerung der Linie AC liegt. Die obige Gleichung behält dagegen, wie wir gesehen haben, ihre Giltigkeit in allen möglichen Fällen bei, wenn wir unter den Buchstaben a, b, c nicht mehr die absoluten Maßzahlen von Linien, sondern Abscissen oder Ordinaten verstehen, welche nach der Verschiedenheit ihrer Lage als positiv oder negativ angenommen werden. Es ist daher diese Annahme nicht eine willkürliche, sondern aus der Natur der Sache selbst mit Nothwendigkeit hervorgehend, da ohne dieselbe ein allgemeines Operiren in analytischer Darstellung überhaupt nicht möglich sein würde.

Bemerkung.

Durch den vorhergehenden Lehrsatz werden wir in den Stand gesetzt, mehrere für die Entwickelungen der Polygonometrie wichtige Aufgaben (§§. 124, 129 und 130) zu lösen.

§. 124. Aufgabe.

Die Entfernung BD = a zweier Punkte B und D, Fig. 56, zu berechnen, wenn die Coordinaten des einen Punktes B gleich x und y und die des andern D gleich x′ und y′ gegeben sind.

Auflösung. $a = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$.

Beweis. Denken wir uns den Anfangspunkt der Coordinaten in einen dieser Punkte selbst, z. B. in den Punkt B verlegt, und bezeichnen wir die Coordinaten des andern Punktes D für diesen Anfangspunkt mit u und v, so ist nach §. 5 $a^2 = u^2 + v^2$.

Zufolge des vorhergehenden §. ist aber

$$x' = x + u \text{ und } y' = y + v,$$

folglich

$$u = x' - x \text{ und } v = y' - y.$$

Setzen wir diese Werthe in die vorhergehende Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in $a^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$.

§. 125. Erklärung.

Wenn zwei Linien BC und BD, Fig. 57, von einem Punkte ausgehen, (ohne selbst wieder eine gerade Linie zu bilden), so schließen dieselben einen hohlen und einen erhabenen Winkel ein, welche sich zu 360° ergänzen. Da im Folgenden bald der eine, bald der andere dieser Winkel in Betracht gezogen werden soll, so ist es nothwendig, eine gewisse Bestimmung darüber festzusetzen, welcher von beiden Winkeln in jedem besondern Falle in Anwendung zu bringen ist. Bekanntlich können wir uns jeden Winkel dadurch entstanden denken, daß der eine Schenkel BC um den Scheitelpunkt B bis in die Lage des andern Schenkels BD gedreht worden ist. Je nachdem diese Drehung nach der einen oder andern Seite ausgeführt wird, erzeugt der bewegte Schenkel einen hohlen oder einen erhabenen Winkel. Um nun Zweideutigkeiten auszuschließen, wollen wir im Folgenden annehmen, daß diese Drehung allemal in der bereits in §. 4 angegebenen (und in der Figur durch einen beigesetzten Pfeil angedeuteten) Richtung erfolgt, nämlich in derjenigen Richtung, in welcher der positive Schenkel der Abscissenaxe 90° durchläuft, um in die Lage des positiven Schenkels der Ordinatenaxe zu gelangen.

Unter dem Winkel, um welchen eine Linie BD von einer andern Linie BC abweicht, werden wir demgemäß im Folgenden allemal denjenigen (hohlen oder erhabenen) Winkel verstehen, um welchen die letztere Linie BC in der festgestellten Richtung gedreht werden muß, um in die Lage der ersteren Linie BD zu gelangen.

(Hiernach weicht in der Figur BD von BC um einen hohlen, BC aber von BD um einen erhabenen Winkel ab, d. h. die Linie BD beschreibt einen erhabenen Winkel, wenn sie in der angegebenen Richtung bis in die Lage der Linie BC gedreht wird).

Da die Drehung des bewegten Schenkels nach zwei entgegengesetzten Richtungen erfolgen kann, so kann man auch die Winkel, welche durch die Drehung in der angegebenen Richtung hervorgehen, als positiv, und diejenigen, welche durch eine Drehung in der entgegengesetzten Richtung erzeugt werden, als negativ bezeichnen. Ist z. B. Fig. 54, der hohle Winkel DBC $= \alpha$, der erhabene $= \beta$, so kann man die Größe, um welche die Linie BD von BC abweicht, eben sowohl durch $+ \alpha$ als durch $- \beta$, und die Abweichung der Linie BC von BD sowohl durch $+ \beta$ als durch $- \alpha$ ausdrücken.

§. 126. Erklärung.

Wenn von einem bestimmten Punkte B, Fig. 57, eine oder mehrere Linien BC, BD . . ausgehen, so wird die Lage derselben offenbar festgestellt sein, wenn man die Winkel kennt, welche sie mit einer gegebenen Linie

bilden. Als die letztere pflegt man eine mit dem positiven Schenkel der Abscissenaxe parallele Linie BE zu wählen. Der Winkel, um welchen die Linie BC (oder BD) von dieser durch den Endpunkt B mit dem positiven Schenkel der Abscissenaxe parallel gezogenen Linie BE abweicht, wird vorzugsweise der Abweichungswinkel der Linie BC (oder BD) in dem Endpunkte B genannt.

§. 127. Zusatz.

Wenn wir eine Linie BC, Fig. 57, über den einen Endpunkt C verlängern, so ist der Abweichungswinkel der Verlängerung CF im Endpunkte C (d. h. der Winkel, um welchen die Verlängerung CF von einer mit dem positiven Schenkel der Abciſſenaxe parallel gezogenen Linie CG abweicht), gleich dem Abweichungswinkel der Linie BC selbst im andern Endpunkte B, (d. h. dem Winkel, um welchen die Linie BC von der zur Abscissenaxe parallelen Linie BE abweicht).

Dagegen ist der Abweichungswinkel der Linie BC in dem einen Endpunkte B von dem Abweichungswinkel dieser Linie in dem andern Endpunkte C um 180^0 verschieden. Denn der erstere Abweichungswinkel entsteht, wenn wir die Linie BE, der andere, wenn wir die Linie CG in der vorgeschriebenen Richtung so lange um die Punkte B und C herumdrehen, bis sie mit der Linie BC zusammenfallen. Von den durch diese Drehung erzeugten Winkeln übertrifft aber der eine den andern offenbar um 180^0.

§. 128. Erklärung.

Da zwei Winkel, welche sich um 360^0 unterscheiden, in der Zeichnung nicht von einander verschieden sind und überdies nach §. 12 die nämlichen trigonometrischen Functionen haben, so werden wir im Folgenden auch solche Winkel, deren Differenz 360^0 oder ein Vielfaches von 360^0 beträgt, einander gleich setzen. — Bezeichnet daher α irgend einen in Graden ausgedrückten Winkel, so ist zufolge der vorstehenden Erklärung

$$\alpha = 360^0 + \alpha = 720^0 + \alpha \text{ u. s. w.}$$

Wie wir in der Anmerkung zu §. 125 gesehen haben, kann der Winkel, um welchen eine Linie BD, Fig. 57, von einer andern BC abweicht, eben sowohl positiv als negativ ausgedrückt werden. Bezeichnen wir den erstern mit $+ \alpha$, den letztern mit $- \beta$, so ist $\alpha + \beta = 360^0$, d. h. wenn wir die Linie BC das einemal nach der einen, das anderemal nach der entgegengesetzten Seite um den Punkt B so lange herumdrehen, bis sie in die Lage der Linie BD kommt, so ergänzen sich die durch diese Drehung entstandenen Winkel zu 360^0. Demnach ist die algebraische Differenz von $+ \alpha$ und $- \beta$, d. h. $+ \alpha - (- \beta) = \alpha + \beta = 360^0$. Es ist daher in dem Sinne der oben aufgestellten Erklärung der positive Abweichungswinkel $+ \alpha$ allemal gleich dem negativen Abweichungswinkel $- \beta$.

§. 129. Aufgabe.

Aus den Coordinaten x und y des einen Endpunktes B einer Linie und aus den Coordinaten x' und y' des andern Endpunktes C dieser Linie den Abweichungswinkel α dieser Linie für den ersten Endpunkt B zu berechnen, Fig. 57.

Auflösung. $\quad \text{tang}\ \alpha = \dfrac{y' - y}{x' - x}.$

Beweis. Verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in den Endpunkt B und bezeichnen wir die Coordinaten des andern Endpunktes C für diesen Anfangspunkt mit u und v, so ist

$$u = x' - x \text{ und } v = y' - y.$$

Zufolge der in §. 7 aufgestellten Erklärung ist aber

$$\tang \alpha = \frac{v}{u} = \frac{y' - y}{x' - x}.$$

§. 130. Aufgabe.

Von einer Linie BC = a, Fig. 57, ist der Abweichungswinkel für den einen Endpunkt B gleich α und die Coordinaten dieses Endpunktes sind gleich x und y gegeben; es sollen hieraus die Coordinaten x' und y' des andern Endpunktes C berechnet werden.

Auflösung. $x' = x + a \cos \alpha$ und $y' = y + a \sin \alpha$.

Beweis. Haben u und v die in §. 124 angegebene Bedeutung, so ist nach §. 7

$$\frac{u}{a} = \cos \alpha \text{ und } \frac{v}{a} = \sin \alpha$$

oder

$$u = a \cos \alpha \text{ und } v = a \sin \alpha,$$

folglich

$$x' = x + u = x + a \cos \alpha$$

und

$$y' = y + v = y + a \sin \alpha.$$

B. Gleichungen über das Vieleck.

§. 131. Erklärung.

Bei den folgenden Entwickelungen über Vielecke werden wir allemal eine Seite und eine in derselben liegende Ecke als die erste annehmen und dann die übrigen Seiten und Ecken des Vielecks in der mehrfach besprochenen Richtung weiter zählen. — Wir bezeichnen demgemäß die Seiten des in Fig. 58 verzeichneten Vielecks mit a_1, a_2, a_3 . . .

Wenn wir jede Seite über den Endpunkt, welchen sie mit der folgenden Seite gemeinschaftlich hat, hinaus verlängern, so bezeichnen wir den entstandenen Außenwinkel, um welchen eine folgende Seite von der Verlängerung der vorhergehenden abweicht, mit A_1, A_2, A_3 . . . Wir verstehen also z. B. unter A_3 denjenigen Winkel, um welchen die Seite a_3 von der Verlängerung der Seite a_2 abweicht.

§. 132. Zusatz.

An denjenigen Ecken, an welchen die innern Winkel eines Vielecks hohle sind, sind auch die zugehörigen Außenwinkel hohl, so z. B. in dem Sechsecke der Fig. 58 an den Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 und A_6. Dagegen ist der Außenwinkel an der Ecke A_5, an welcher der innere Winkel des Vielecks ein erhabener ist, ebenfalls größer als ein flacher. Denn es ist klar, daß die Verlängerung der Seite a_4 um einen erhabenen Winkel in der festgestellten Richtung gedreht werden muß, um in die Lage der Seite a_5 zu gelangen.

Wir können jedoch diesen erhabenen Außenwinkel A_5 zufolge des in der Anmerkung zu §. 125 Gesagten auch durch einen negativ ausgedrückten hohlen Winkel ersetzen, welchen die Verlängerung der Seite a_4 beschreibt, wenn wir dieselbe in der entgegengesetzten Richtung bis in die Lage der Seite a_5 drehen.

§. 133. Erklärung.

Im Folgenden werden wir die Coordinaten der ersten Ecke, A_1 eines Vielecks mit x_1 und y_1, der zweiten Ecke A_2 mit x_2 und y_2 u. s. w. und die Abweichungswinkel der Seiten a_1, a_2 . . . welche sie in ihren ersten Endpunkten A_1, A_2 . . . bilden, mit α_1, α_2 . . . bezeichnen.

Da die Lage der Coordinatenaxen, auf welche die Seiten und Ecken des Vielecks bezogen werden sollen, eine ganz willkürliche ist, so lassen sich dieselben allemal so wählen, daß sämmtliche Ecken des Vielecks in die erste Region fallen, wie dies z. B. bei den in Fig. 58, 59 und 60 verzeichneten Vielecken der Fall ist.

Die folgenden Sätze gelten jedoch nicht bloß für diesen beschränkten Fall, welcher in praktischer Hinsicht die meiste Bequemlichkeit gewährt, sondern ganz allgemein für jedes Axenpaar.

Wir wenden uns nun zu der Aufgabe, wenn von einem Vielecke die Seiten a_1, a_2, a_3 und die Außenwinkel A_1, A_2, A_3 . . ., ferner die Coordinaten der ersten Ecke x_1 und y_1, und der Abweichungswinkel der ersten Seite α_1 gegeben sind, die nämliche Bestimmung für die übrigen Seiten und Ecken des Vielecks herzuleiten.

§. 134. Lehrsatz.

Bezeichnen wir irgend eine Seite des Vielecks mit a_h, den Abweichungswinkel derselben mit α_h, ferner die Coordinaten ihres ersten Endpunktes, d. h. desjenigen, welchen sie mit der vorhergehenden Seite gemeinschaftlich hat, mit x_h und y_h, so ist

1) $\alpha_h = \alpha_1 + A_2 + A_3 \ldots\ldots + A_h$,

2) $x_h = x_1 + a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 \ldots\ldots + a_{h-1} \cos \alpha_{h-1}$

3) $y_h = y_1 + a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 \ldots + a_{h-1} \sin \alpha_{h-1}$.

Beweis. 1) Wenn wir uns durch die Ecke A_2 eine Parallele A_2B_2 Fig. 58 mit dem positiven Schenkel der Abscissenaxe gezogen denken, so ist nach §. 127 der Winkel, um welchen die Verlängerung der Seite a_1 von dieser Parallelen abweicht, $= \alpha_1$ und der Abweichungswinkel der Seite a_2 offenbar der Summe aus diesem Winkel und dem Außenwinkel A_2 gleich, folglich $\qquad \alpha_2 = \alpha_1 + A_2$.

Eben so finden wir: $\alpha_3 = \alpha_2 + A_3$, oder wenn wir den Werth von α_2 einsetzen, $\qquad \alpha_3 = \alpha_1 + A_2 + A_3$.

Auf demselben Wege fortfahrend erhalten wir

$$\alpha_4 = \alpha_1 + A_2 + A_3 + A_4$$
$$\alpha_5 = \alpha_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \text{ u. s. w.}$$

2) Zufolge des §. 130 ist

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + a_1 \cos \alpha_1 \\ x_3 &= x_2 + a_2 \cos \alpha_2 \\ &= x_1 + a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 \\ x_4 &= x_3 + a_3 + \cos \alpha_3 \\ &= x_1 + a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

3) Nach dem eben angeführten §. ist ferner

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + a_1 \sin \alpha_1 \\ y_3 &= y_2 + a_2 \sin \alpha_2 \\ &= y_1 + a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 \\ y_4 &= y_3 + a_3 \sin \alpha_3 \\ &= y_1 + a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

§. 135. Lehrsatz.

Bezeichnen wir mit n die Anzahl der Ecken eines Vielecks, so finden zwischen den Seiten und Winkeln desselben allemal folgende Gleichungen statt:

$$1)\quad o = A_1 + A_2 + A_3 \ldots + A_n$$

$$2)\quad o = \left\{\begin{array}{l} a_1 \cos A_1 \\ + a_2 \cos (A_1 + A_2) \\ + a_3 \cos (A_1 + A_2 + A_3) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + a_{n-1} (A_1 + A_2 \ldots + A_{n-1}) \\ + a_n \end{array}\right.$$

$$3)\quad o = \left\{\begin{array}{l} a_1 \sin A_1 \\ + a_2 \sin (A_1 + A_2) \\ + a_3 \sin (A_1 + A_2 + A_3) \\ \cdot \\ \cdot \\ + a_{n-1} \sin (A_1 + A_2 \ldots + A_{n-1}). \end{array}\right.$$

Beweis. 1) Um größerer Deutlichkeit willen wollen wir den Beweis an einem Sechsecke, Fig. 59, führen. Da ferner die Lage der Coordinatenaxen ganz willkürlich ist, so wird es uns frei stehen, dieselben so anzunehmen, daß die letzte Seite des Vielecks A_6A_1 dem positiven Schenkel der Abscissenaxe parallel ist. Dann ist der Abnehmungswinkel dieser Seite α_6 offenbar $= o$ und der Abweichungswinkel α_1 der ersten Seite gleich dem Außenwinkel A_1. Zufolge des vorhergehenden §. ist aber

$$\alpha_6 = \alpha_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6.$$

Setzen wir die angegebenen Werthe, $\alpha_6 = o$ und $\alpha_1 = A_1$, in diese Gleichung ein, so verwandelt sich dieselbe in:

$$o = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6,$$

d. h. die Summe aller Außenwinkel eines Vielecks ist einem Vielfachen von 360^0 gleich*).

2) Nach den vorhergehenden §§. ist

$$x_6 = x_1 + a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 + a_4 \cos \alpha_4 + a_5 \cos \alpha_5.$$

Nun ist aber zufolge unserer Annahme, daß die Seite $A_6\,A_1$ mit dem positiven Schenkel der Abscissenaxe parallel läuft, offenbar

$$x_1 = x_6 + a_6;$$

ferner $\alpha_1 = A_1$, daher nach dem vorhergehenden §. $\alpha_2 = A_1 + A_2$, $\alpha_3 = A_1 + A_2 + A_3$ u. s. w. Hiernach verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in die folgende

$$o = \left\{\begin{array}{l} a_1 \cos A_1 + a_2 \cos (A_1 + A_2) + a_3 \cos (A_1 + A_2 + A_3) \\ + a_4 \cos (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \\ + a_5 \cos (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5) \\ + a_6. \end{array}\right.$$

*) Man kann sich hiervon auch noch in folgender Art überzeugen: Wenn wir uns die Seite a_6 und die Ecke A_6 allmählig so herumgedreht denken, daß sie zunächst der Seite a_1, dann ferner der Seite a_2, a_3, a_4, a_5 parallel wird, und endlich noch so weit drehen, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage fällt, so hat sie bei dieser Drehung, wenn die inneren Winkel des Vielecks sämmtlich hohl sind, 360^0 einmal, wenn aber unter diesen Winkeln auch erhabene sind, mehrmals durchlaufen.

3) Zufolge des vorhergehenden §. ist

$$y_6 = y_1 + a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 + a_4 \sin \alpha_4 + a_5 \sin \alpha_5.$$

Da wir die Seite $A_6 A_1$ mit der Abscissenaxe parallel angenommen haben, so ist $y_6 = y_1$, wonach die vorhergehende Gleichung, wenn wir statt α_1, α_2 ... ihre Werthe setzen, übergeht in:

$$o = \begin{cases} a_1 \sin A_1 + a_2 \sin (A_1 + A_2) + a_3 \sin (A_1 + A_2 + A_3) \\ + a_4 \sin (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + a_5 \sin (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5). \end{cases}$$

§. 136. Zusatz.

Der vorhergehende §. hat uns drei Gleichungen kennen gelehrt, welche zwischen den n-Seiten und n-Winkeln eines jeden n-ecks stattfinden. Im allgemeinen muß es daher möglich sein, wenn von diesen 2n-Stücken 2n — 3 gegeben sind, die fehlenden 3 mit Hilfe jener Gleichungen zu finden. Die Ausführung der erforderlichen Rechnungen ist jedoch theils schwierig, theils weitläufig und daher für die praktische Anwendung ungeeignet.

Wenn das aufzulösende Vieleck ein Dreieck, also $n = 3$ ist, so gehen die Gleichungen (2) und (3) in die folgenden über:

$$o = a_1 \cos A_1 + a_2 \cos (A_1 + A_2) + a_3$$

und

$$o = a_1 \sin A_1 + a_2 \sin (A_1 + A_2).$$

Bezeichnen wir die an den Ecken A_1, A_2, A_3 liegenden innern Winkel des Dreiecks beziehlich mit B, C und A, wie dieses Fig. 61 zeigt, so ist

$$A_1 = 180^0 - B,\ A_2 = 180^0 - C,\ A_3 = 180^0 - A.$$

Bezeichnen wir ferner noch die den Winkeln A, B, C gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c, ersetzen wir also a_1 durch a, a_2 durch b und a_3 durch c, so verwandeln sich die obigen Gleichungen in:

$$o = a \cos A_1 + b \cos (A_1 + A_2) + c$$

und

$$o = a \sin A_1 + b \sin (A_1 + A_2).$$

Nun ist aber

$$\cos A_1 = \cos (180^0 - B) = -\cos B$$
$$\sin A_1 = \sin (180^0 - B) = +\sin B$$
$$\cos (A_1 + A_2) = \cos (360^0 - (B + C)) = +\cos (B + C) = -\cos A$$
$$\sin (A_1 + A_2) = \sin (360^0 - (B + C)) = -\sin (B + C) = -\sin A.$$

Setzen wir diese Werthe in die vorhergehenden Gleichungen ein, so erhalten wir

$$o = -a \cos B - b \cos A + c$$

und

$$o = a \sin B - b \sin A$$

oder

$$c = a \cos B + b \cos A$$

und

$$a \sin B = b \sin A.$$

Es sind daher die in §. 53 und 54 aufgeführten Fundamentalgleichungen specielle Fälle der allgemeinern Gleichungen des vorhergehenden §., welche für alle Vielecke ohne Ausnahme gelten und in jene übergehen, wenn man die Zahl der Seiten $n = 3$ annimmt.

Wenn wir in den Gleichungen (2) und (3) des vorhergehenden §. der Kürze wegen $A_1 = \alpha_1$, $A_1 + A_2 = \alpha_2$, $A_1 + A_2 + A_3 = \alpha_3$ u. s. w. setzen, so können wir denselben die folgende Form geben:

$$-a_n = a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 \ldots\ldots + a_{n-1} \cos \alpha_{n-1}$$

und

$$o = a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 \ldots\ldots + a_{n-1} \sin \alpha_{n-1}.$$

Wenn wir diese Gleichungen quadriren, die entstandenen Quadrate addiren und zugleich erwägen, daß

$$a_1^2 \cos \alpha_1^2 + a_1^2 \sin \alpha_1^2 = a_1^2$$
$$a_2^2 \cos \alpha_2^2 + a_2^2 \sin \alpha_2^2 = a_2^2 \text{ u. s. w.}$$

ferner $2a_1 a_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + 2a_1 a_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = 2a_1 a_2 \cos (\alpha_2 - \alpha_1)$

$2a_1 a_3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + 2a_1 a_3 \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 = 2a_1 a_3 \sin (\alpha_3 - \alpha_1)$

ist, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$a_n^2 = \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ldots\ldots\ldots + a^2_{n-1} \\ + 2a_1 a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + 2a_1 a_3 \cos(\alpha_3 - \alpha_1) \ldots + 2a_1 a_{n-1} \cos(\alpha_{n-1} - \alpha_1) \\ \qquad + 2a_2 a_3 \cos(\alpha_3 - \alpha_2) \ldots + 2a_2 a_{n-1} \cos(\alpha_{n-1} - \alpha_2) \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + 2a_{n-2}\, a_{n-1} \cos(\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}). \end{cases}$$

Zufolge unserer Bezeichnung ist

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= A_2 \\ \alpha_3 - \alpha_1 &= A_2 + A_3 \\ \alpha_{n-1} - \alpha_1 &= A_2 + A_3 \ldots + A_{n-1} \\ \alpha_3 - \alpha_2 &= A_3 \\ \alpha_{n-1} - \alpha_2 &= A_3 + A_4 \ldots . + A_{n-1} \\ \alpha_{n-1} - \alpha_{n-2} &= A_{n-1}. \end{aligned}$$

Hiernach geht die vorstehende Gleichung in die folgende über:

$$a_n^2 = \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ldots\ldots + a_{n-1}^2 \\ + 2a_1 a_2 \cos A_2 + 2a_1 a_3 \cos(A_2 + A_3) \ldots\ldots + 2a_1 a_{n-1} \cos(A_2 + A_3 \ldots + A_{n-1}) \\ \qquad + 2a_2 a_3 \cos A_3 \ldots\ldots + 2a_2 a_{n-1} \cos(A_3 + A_4 \ldots + A_{n-1}) \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + 2a_{n-2} a_{n-1} \cos A_{n-1}. \end{cases}$$

Diese Gleichung bildet offenbar eine Analogie zu der Gleichung

$$a^2 = b_2 + c^2 - 2bc \cos A$$

und könnte dazu dienen, wenn von einem Vielecke alle Seiten und Winkel bis auf eine Seite a_n und die ihr anliegenden Winkel A_n und A_1 gegeben sind, die fehlende Seite a_n zu berechnen.

Um einen der fehlenden Winkel, z. B. A_1 zu erhalten, setzen wir in der Gleichung

$$o = a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 \ldots + a_{n-1} \sin \alpha_{n-1}$$

statt $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ ihre oben angegebenen Werthe, wodurch sich dieselbe verwandelt in:

$$o = a_1 \sin A_1 + a_2 \sin (A_1 + A_2) + a_3 \sin (A_1 + A_2 + A_3) \\ + a_{n-1} \sin (A_1 + A_2 \ldots + A_{n-1}).$$

Bringen wir in den eingeschlossenen Ausdrücken A_1 aus den Klammern heraus, indem wir nach der Summenformel entwickeln, so erhalten wir

$$\begin{aligned} o = {} & a_1 \sin A_1 + a_2 \sin A_1 \cos A_2 + a_2 \cos A_1 \sin A_2 \\ & + a_3 \sin A_1 \cos (A_2 + A_3) + a_3 \cos A_1 \sin (A_2 + A_3) \\ & \ldots + a_{n-1} \sin A_1 \cos (A_2 + A_3 \ldots + A_{n-1}) + a_{n-1} \cos A_1 \sin (A_2 + A_3 \ldots + A_{n-1}). \end{aligned}$$

Dividiren wir die ganze Gleichung durch $\cos A_1$ und ersetzen $\frac{\sin A_1}{\cos A_1}$ durch $\tang A_1$, so ergibt sich $- \tang A_1$

$$= \frac{a_2 \sin A_2 + a_3 \sin (A_2 + A_3) \ldots + a_{n-1} \sin (A_2 + A_3 \ldots + A_{n-1})}{a_1 + a_2 \cos A_2 + a_3 \cos (A_2 + A_3) \ldots + a_{n-1} \cos (A_2 + A_3 \ldots + A_{n-1})}.$$

§. 137. Zusatz.

Die vorhergehenden Paragraphen finden wichtige Anwendungen beim Feldmessen; hat man nämlich die Seiten und Winkel eines Vielecks gemessen und will von demselben eine Zeichnung nach einem verjüngten Maßstabe entwerfen, so verfährt man am vortheilhaftesten auf die Art, daß man zuerst zwei sich senkrecht durchschneidende Linien zeichnet, dann den Coordinaten irgend einer

Ecke, welche man als die erste annimmt, eine willkürliche, aber solche Größe beilegt, daß auch alle andern Ecken in die erste Region fallen und der letzten Seite eine zur Absciſſenaxe parallele Lage gibt, hierauf nach der Gleichung (1) des §. 134 die Abweichungswinkel der übrigen Seiten und dann weiter nach den Gleichungen (2) und (3) die Coordinaten ſämmtlicher Ecken berechnet. Mit Hilfe der erhaltenen Werthe der Coordinaten laſſen ſich nun die einzelnen Ecken ſehr leicht und mit einem hohen Grade von Genauigkeit in die Zeichnung eintragen, indem jede Ecke als der Durchſchnitt zweier ſich ſenkrecht durchſchneidenden Linien erhalten wird. Man trägt nämlich die Abſciſſe und Ordinate der zu beſtimmenden Ecke beziehlich auf die Abſciſſen- und Ordinatenaxe auf und zieht durch die Endpunkte Parallelen mit den Axen; der Durchſchnitt dieſer Parallelen iſt die geſuchte Ecke.

Durch die Gleichungen der §§. 124 und 129 wird man überdies noch in den Stand geſetzt, die Länge und den Abweichungswinkel einer beliebigen Diagonale des Vierecks zu berechnen.

Obſchon vermöge der Gleichungen des §. 135 von den n-Seiten und n-Winkeln eines n-ecks nur $2n - 3$ Stücke gegeben zu ſein brauchen und die noch fehlenden 3 Stücke durch jene Gleichungen gefunden werden können, ſo wird man es doch, wenn nicht beträchtliche Hinderniſſe entgegenſtehen, vorziehen, ſämmtliche Seiten und Winkel eines Vielecks zu meſſen. Man kann dann jene Gleichungen dazu benutzen, die Richtigkeit der ausgeführten Meſſungen zu prüfen. Wegen der mit jeder Meſſung unvermeidlich verbundenen Fehler, wird es faſt nie der Fall ſein, daß die Reſultate der Meſſung jenen Gleichungen vollkommen Genüge leiſten. So lange nun die Abweichung nicht eine ſolche Größe erreicht, daß die ausgeführte Meſſung überhaupt verworfen und von neuem unternommen werden muß, wird man die angeführten Gleichungen dazu benutzen, die begangenen Fehler zu vertheilen und hierdurch zu verhindern, daß dieſelben ſich nicht in einem Punkte (dem letzten) anhäufen. Findet man nämlich zunächſt, daß die Summe aller Außenwinkel von 360^0 oder einem Vielfachen von 360^0 um die Größe $\pm\, \delta$ abweicht, ſo vermindert oder vermehrt man den durch die Meſſung erhaltenen Werth eines jeden Außenwinkels um den n-ten Theil von δ. Mit den ſo verbeſſerten Werthen der Außenwinkel und den durch die Meſſung erhaltenen Werthen der Seiten berechnet man dann die einzelnen Glieder der Gleichung (2) des §. 135. Weicht die Summe derſelben von Null um $\pm\, d$ ab, ſo vermindert oder vermehrt man jedes Glied um $\frac{d}{n}$ und beſtimmt dann nach der Gleichung (2) des §. 134, indem man die ſo verbeſſerten Werthe zu dem willkürlich angenommenen Werthe von x_1 addirt, die Abſciſſen der einzelnen Ecken. — Eben ſo berechnet man die ſämmtlichen Glieder der Gleichung (3) des §. 135, vermindert oder vermehrt, wenn die Abweichung $= \pm\, d'$ iſt, jedes Glied um $\frac{d'}{n-1}$ und addirt dieſe verbeſſerten Werthe zu dem willkürlich angenommenen Werthe der erſten Ordinate y_1.

§. 138. Lehrſatz.

Wenn die Bezeichnung eines Vielecks in der mehrfach feſtgeſtellten Folge geordnet iſt, ſo iſt der doppelte Inhalt desſelben

$$2J = \begin{cases}(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) \\ \ldots + (x_{n-1} - x_n)(y_{n-1} + y_n) + (x_n - x_1)(y_n + y_1).\end{cases}$$

Beweis. Wir beſchränken uns darauf, den Beweis dieſes, hauptſächlich in praktiſcher Hinſicht nützlichen, Satzes für ein Sechseck, Fig. 60, zu

führen. Zu diesem Zwecke zeichnen wir für sämmtliche Ecken des Sechsecks die zugehörigen Ordinaten A_1B_1, A_2B_2 u. s. w. Dann wird der Inhalt J des Sechsecks erhalten werden können, wenn wir die Inhalte der entstandenen Trapeze theils addiren, theils subtrahiren. Wie leicht zu sehen, ist der Inhalt des Sechsecks

$$J = \begin{cases} A_3A_4B_3B_4 + A_4A_5B_4B_5 + A_5A_6B_5B_6 \\ - A_6A_1B_6B_1 - A_1A_2B_1B_2 - A_2A_3B_2B_3. \end{cases}$$

Der Inhalt des Trapezes $A_3A_4B_3B_4$ ist bekanntlich gleich

$$\frac{B_3B_4 \cdot (A_3B_3 + A_4B_4)}{2} = \frac{(x_3 - x_4)(y_3 + y_4)}{2}.$$

Drücken wir die Inhalte der übrigen Trapeze auf gleiche Weise aus, setzen die Werthe in die obige Gleichung ein und multipliciren, um die Brüche wegzuschaffen, die ganze Gleichung mit 2, so erhalten wir

$$2J = \begin{cases} (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) + (x_4 - x_5)(y_4 + y_5) + (x_5 - x_6)(y_5 + y_6) \\ -(x_1 - x_6)(y_1 + y_6) - (x_2 - x_1)(y_1 + y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 + y_3) \end{cases}$$

wofür wir auch setzen können:

$$2J = \begin{cases} (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) \\ +(x_4 - x_5)(y_4 + y_5) + (x_5 - x_6)(y_5 + y_6) + (x_6 - x_1)(y_6 + y_1). \end{cases}$$

In ähnlicher Art, wie wir den Beweis für das in der Figur 60 gezeichnete Sechseck geführt haben, läßt sich die Richtigkeit des Satzes auch für jedes andere Vieleck darthun.

Nach §. 134 ist

$$x_1 - x_2 = - a_1 \cos \alpha_1$$
$$x_2 - x_3 = - a_2 \cos \alpha_2$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1} - x_n = - a_{n-1} \cos \alpha_{n-1}$$
$$x_n - x_1 = a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 \ldots + a_{n-1} \cos \alpha_{n-1}.$$

Setzen wir diese Werthe in die allgemeine Gleichung des vorhergehenden §. ein, so verwandelt sich dieselbe in

$$2J = \begin{cases} - a_1 \cos \alpha_1 (y_1 + y_2) - a_2 \cos \alpha_2 (y_2 + y_3) \\ - a_3 \cos \alpha_3 (y_3 + y_4) \ldots - a_{n-1} \cos \alpha_{n-1} (y_{n-1} + y_n) \\ + (a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 \ldots + a_{n-1} \cos \alpha_{n-1})(y_n + y_1) \end{cases}$$

oder wenn wir diejenigen Glieder, welche die nämliche Seite a_1 oder a_2 oder a_3 ... zum Factor haben, zusammenziehen,

$$2J = \begin{cases} a_1 \cos \alpha_1 (y_n - y_1 + y_1 - y_2) + a_2 \cos \alpha_2 (y_n - y_2 + y_1 - y_3) \\ + a_3 \cos \alpha_3 (y_n - y_3 + y_1 - y_4) \ldots + a_{n-1} \cos \alpha_{n-1} (y_n - y_{n-1} + y_1 - y_n). \end{cases}$$

Nach §. 134 ist

$$y_n - y_1 + y_1 - y_2 = a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 + a_4 \sin \alpha_4 \ldots + a_{n-1} \sin \alpha_{n-1}$$
$$y_n - y_2 + y_1 - y_3 = - a_1 \sin \alpha_1 + a_3 \sin \alpha_3 + a_4 \sin \alpha_4 \ldots + a_{n-1} \sin \alpha_{n-1}$$
$$y_n - y_3 + y_1 - y_4 = - a_1 \sin \alpha_1 - a_2 \sin \alpha_2 + a_4 \sin \alpha_4 \ldots + a_{n-1} \sin \alpha_{n-1}$$
$$\vdots$$
$$y_n - y_{n-1} + y_1 - y_n = - a_1 \sin \alpha_1 - a_2 \sin \alpha_2 - a_3 \sin \alpha_3 \ldots - a_{n-2} \sin \alpha_{n-2}$$

folglich, wenn wir diese Werthe in die vorhergehende Gleichung einsetzen,

$$2J = \begin{cases} a_1 \cos \alpha_1 (a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 + a_4 \sin \alpha_4 \ldots + a_{n-1} \sin \alpha_{n-1}) \\ + a_2 \cos \alpha_2 (- a_1 \sin \alpha_1 + a_3 \sin \alpha_3 + a_4 \sin \alpha_4 \ldots + a_{n-1} \sin \alpha_{n-1}) \\ + a_3 \cos \alpha_3 (- a_1 \sin \alpha_1 - a_2 \sin \alpha_2 + a_4 \sin \alpha_4 \ldots + a_{n-1} \sin \alpha_{n-1}) \\ \vdots \\ + a_{n-1} \cos \alpha_{n-1} (- a_1 \sin \alpha_1 - a_2 \sin \alpha_2 - a_3 \sin \alpha_3 \ldots - a_{n-2} \sin \alpha_{n-2}) \end{cases}$$

Wenn wir die Parenthesen auflösen und die Glieder, welche die nämlichen Seiten zu Factoren haben, zusammenziehen, indem wir zugleich die bekannte Formel

$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha - \beta)$$

anwenden, so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in:

$$2J = \begin{cases} a_1 a_2 \sin (\alpha_2 - \alpha_1) + a_1 a_3 \sin (\alpha_3 - \alpha_1) + a_1 a_4 \sin (\alpha_4 - \alpha_1) \ldots + a_1 a_{n-1} \sin (\alpha_{n-1} - \alpha_1) \\ \qquad + a_2 a_3 \sin (\alpha_3 - \alpha_2) + a_2 a_4 \sin (\alpha_4 - \alpha_2) \ldots + a_2 a_{n-1} \sin (\alpha_{n-1} - \alpha_2) \\ \qquad\qquad + a_3 a_4 \sin (\alpha_4 - \alpha_3) \ldots + a_3 a_{n-1} \sin (\alpha_{n-1} - \alpha_3) \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad + a_{n-2} a_{n-1} \sin (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}). \end{cases}$$

Setzen wir endlich noch statt $\alpha_2, \alpha_3 \ldots$ ihre Werthe

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 + A_2 \\ \alpha_3 &= \alpha_1 + A_2 + A_3 \\ \alpha_4 &= \alpha_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1} &= \alpha_1 + A_2 + A_3 + A_4 \ldots + A_{n-1} \end{aligned}$$

so geht die zuletzt erhaltene Gleichung über in

$$2J = \begin{cases} a_1 a_2 \sin A_2 + a_1 a_2 \sin (A_2 + A_3) + a_1 a_4 \sin (A_2 + A_3 + A_4) \ldots + a_1 a_{n-1} \sin (A_2 + A_3 \ldots + A_{n-1}) \\ \qquad + a_2 a_3 \sin A_3 + a_2 a_4 \sin (A_3 + A_4) \ldots + a_2 a_{n-1} \sin (A_3 + A_4 \ldots + A_{n-1}) \\ \qquad\qquad + a_3 a_4 \sin A_4 \ldots + a_3 a_{n-1} \sin (A_4 + A_5 \ldots + A_{n-1}) \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad + a_{n-2} a_{n-1} \sin A_{n-1}. \end{cases}$$

Diese Gleichung lehrt den Inhalt eines Vielecks finden, wenn von demselben alle Seiten und Winkel bis auf eine Seite (a_n) und die beiden ihr anliegenden Winkel (A_1 und A_n), also wenn von dem Vielecke n — 1 Seiten

$$a_1, a_2, a_3 \ldots . a_{n-1}$$

und die n — 2 eingeschlossenen Winkel

$$A_2, A_3 \ldots A_{n-1}$$

gegeben sind. Dieselbe läßt sich in Worten also aussprechen: **Der Inhalt eines beliebigen Vielecks ist gleich der halben Summe der sämmtlichen Producte, welche entstehen, wenn man je zwei Seiten und den Sinus der Summe der zwischen ihnen liegenden Außenwinkel mit einander multiplicirt.**

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

1. Von den trigonometrischen Functionen.

A. Von den Werthen, welche die trigonometrischen Functionen bei sich ändernder Größe des Winkels durchlaufen, ... 5

B. Von den Beziehungen, welche zwischen den verschiedenen trigonometrischen Functionen des nämlichen Winkels oder Bogens stattfinden, . . . 17

C. Von den trigonometrischen Functionen solcher Winkel, welche der Summe oder Differenz zweier gegebenen Winkel gleich sind, ... 21

D. Berechnung der trigonometrischen Functionen 31

2. Von der Auflösung der Dreiecke.

A. Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks 34

B. Auflösung des gleichschenkligen Dreiecks 39

C. Auflösung des Dreiecks überhaupt 40

D. Trigonometrische Kreisrechnungen 60

Anhang. Vergleichung des Umfangs und Inhalts der Figuren 66

3. Aufgaben.

A. Aus der analytischen Trigonometrie 67

B. Aufgaben über Dreiecke 73

C. Vierecks-Aufgaben 95

4. Anwendungen der Trigonometrie auf die Feldmeßkunst 99

5. Polygonometrie.

A. Umformung der Coordinaten 107

B. Gleichungen über das Vieleck 112

Tafel der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten 121

Tafel

der

Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten

von 10 zu 10 Minuten

für

alle Winkel zwischen 0 und 90°.

G.	M.	Sinus	Tang.			G.	M.	Sinus	Tang.			G.	M.	Sinus	Tang.		
0	0	0.0000	0.0000	60		6	0	0.1045	0.1051	60		12	0	0.2079	0.2126	60	
	10	0.0029	0.0029	50			10	0.1074	0.1080	50			10	0.2108	0.2156	50	
	20	0.0058	0.0058	40			20	0.1103	0.1110	40			20	0.2136	0.2186	40	
	30	0.0087	0.0087	30			30	0.1132	0.1139	30			30	0.2164	0.2217	30	
	40	0.0116	0.0116	20			40	0.1161	0.1169	20			40	0.2193	0.2247	20	
	50	0.0145	0.0145	10			50	0.1190	0.1198	10			50	0.2221	0.2278	10	
	60	0.0175	0.0175	0	89		60	0.1219	0.1228	0	83		60	0.2250	0.2309	0	77
1	0	0.0175	0.0175	60		7	0	0.1219	0.1228	60		13	0	0.2250	0.2309	60	
	10	0.0204	0.0204	50			10	0.1248	0.1257	50			10	0.2278	0.2339	50	
	20	0.0233	0.0233	40			20	0.1276	0.1287	40			20	0.2306	0.2370	40	
	30	0.0262	0.0262	30			30	0.1305	0.1317	30			30	0.2334	0.2401	30	
	40	0.0291	0.0291	20			40	0.1334	0.1346	20			40	0.2363	0.2432	20	
	50	0.0320	0.0320	10			50	0.1363	0.1376	10			50	0.2391	0.2462	10	
	60	0.0349	0.0349	0	88		60	0.1392	0.1405	0	82		60	0.2419	0.2493	0	76
2	0	0.0349	0.0349	60		8	0	0.1392	0.1405	60		14	0	0.2419	0.2493	60	
	10	0.0378	0.0378	50			10	0.1421	0.1435	50			10	0.2447	0.2524	50	
	20	0.0407	0.0407	40			20	0.1449	0.1465	40			20	0.2476	0.2555	40	
	30	0.0436	0.0437	30			30	0.1478	0.1495	30			30	0.2504	0.2586	30	
	40	0.0465	0.0466	20			40	0.1507	0.1524	20			40	0.2532	0.2617	20	
	50	0.0494	0.0495	10			50	0.1536	0.1554	10			50	0.2560	0.2648	10	
	60	0.0523	0.0524	0	87		60	0.1564	0.1584	0	81		60	0.2588	0.2679	0	75
3	0	0.0523	0.0524	60		9	0	0.1564	0.1584	60		15	0	0.2588	0.2679	60	
	10	0.0552	0.0553	50			10	0.1593	0.1614	50			10	0.2616	0.2711	50	
	20	0.0581	0.0582	40			20	0.1622	0.1644	40			20	0.2644	0.2742	40	
	30	0.0610	0.0612	30			30	0.1650	0.1673	30			30	0.2672	0.2773	30	
	40	0.0640	0.0641	20			40	0.1679	0.1703	20			40	0.2700	0.2805	20	
	50	0.0669	0.0670	10			50	0.1708	0.1733	10			50	0.2728	0.2836	10	
	60	0.0698	0.0699	0	86		60	0.1736	0.1763	0	80		60	0.2756	0.2867	0	74
4	0	0.0698	0.0699	60		10	0	0.1736	0.1763	60		16	0	0.2756	0.2867	60	
	10	0.0727	0.0729	50			10	0.1765	0.1793	50			10	0.2784	0.2899	50	
	20	0.0756	0.0758	40			20	0.1794	0.1823	40			20	0.2812	0.2931	40	
	30	0.0785	0.0787	30			30	0.1822	0.1853	30			30	0.2840	0.2962	30	
	40	0.0814	0.0816	20			40	0.1851	0.1883	20			40	0.2868	0.2994	20	
	50	0.0843	0.0846	10			50	0.1880	0.1914	10			50	0.2896	0.3026	10	
	60	0.0872	0.0875	0	85		60	0.1908	0.1944	0	79		60	0.2924	0.3057	0	73
5	0	0.0872	0.0875	60		11	0	0.1908	0.1944	60		17	0	0.2924	0.3057	60	
	10	0.0901	0.0904	50			10	0.1937	0.1974	50			10	0.2952	0.3089	50	
	20	0.0929	0.0934	40			20	0.1965	0.2004	40			20	0.2979	0.3121	40	
	30	0.0958	0.0963	30			30	0.1994	0.2035	30			30	0.3007	0.3153	30	
	40	0.0987	0.0992	20			40	0.2022	0.2065	20			40	0.3035	0.3185	20	
	50	0.1016	0.1022	10			50	0.2051	0.2095	10			50	0.3062	0.3217	10	
	60	0.1045	0.1051	0	84		60	0.2079	0.2126	0	78		60	0.3090	0.3249	0	72
		Cosin.	Cotang	M.	G.			Cosin.	Cotang	M.	G.			Cosin.	Cotang	M.	G.

G.	M.	Sinus	Tang.		
18	0	0.3090	0.3249	60	
	10	0.3118	0.3281	50	
	20	0.3145	0.3314	40	
	30	0.3173	0.3346	30	
	40	0.3201	0.3378	20	
	50	0.3228	0.3411	10	
	60	0.3256	0.3443	0	71
19	0	0.3256	0.3443	60	
	10	0.3283	0.3476	50	
	20	0.3311	0.3508	40	
	30	0.3338	0.3541	30	
	40	0.3365	0.3574	20	
	50	0.3393	0.3607	10	
	60	0.3420	0.3640	0	70
20	0	0.3420	0.3640	60	
	10	0.3448	0.3673	50	
	20	0.3475	0.3706	40	
	30	0.3502	0.3739	30	
	40	0.3529	0.3772	20	
	50	0.3557	0.3805	10	
	60	0.3584	0.3839	0	69
21	0	0.3584	0.3839	60	
	10	0.3611	0.3872	50	
	20	0.3638	0.3906	40	
	30	0.3665	0.3939	30	
	40	0.3692	0.3973	20	
	50	0.3719	0.4006	10	
	60	0.3746	0.4040	0	68
22	0	0.3746	0.4040	60	
	10	0.3773	0.4074	50	
	20	0.3800	0.4108	40	
	30	0.3827	0.4142	30	
	40	0.3854	0.4176	20	
	50	0.3881	0.4210	10	
	60	0.3907	0.4245	0	67
23	0	0.3907	0.4245	60	
	10	0.3934	0.4279	50	
	20	0.3961	0.4314	40	
	30	0.3987	0.4348	30	
	40	0.4014	0.4383	20	
	50	0.4041	0.4417	10	
	60	0.4067	0.4452	0	66
24	0	0.4067	0.4452	60	
	10	0.4094	0.4487	50	
	20	0.4120	0.4522	40	
	30	0.4147	0.4557	30	
	40	0.4173	0.4592	20	
	50	0.4200	0.4628	10	
	60	0.4226	0.4663	0	65
25	0	0.4226	0.4663	60	
	10	0.4253	0.4699	50	
	20	0.4279	0.4734	40	
	30	0.4305	0.4770	30	
	40	0.4331	0.4806	20	
	50	0.4358	0.4841	10	
	60	0.4384	0.4877	0	64
		Cosin.	Cotang	M.	G.

G.	M.	Sinus	Tang.		
26	0	0.4384	0.4877	60	
	10	0.4410	0.4913	50	
	20	0.4436	0.4950	40	
	30	0.4462	0.4986	30	
	40	0.4488	0.5022	20	
	50	0.4514	0.5059	10	
	60	0.4540	0.5095	0	63
27	0	0.4540	0.5095	60	
	10	0.4566	0.5132	50	
	20	0.4592	0.5169	40	
	30	0.4617	0.5206	30	
	40	0.4643	0.5243	20	
	50	0.4669	0.5280	10	
	60	0.4695	0.5317	0	62
28	0	0.4695	0.5317	60	
	10	0.4720	0.5354	50	
	20	0.4746	0.5392	40	
	30	0.4772	0.5430	30	
	40	0.4797	0.5467	20	
	50	0.4823	0.5505	10	
	60	0.4848	0.5543	0	61
29	0	0.4848	0.5543	60	
	10	0.4874	0.5581	50	
	20	0.4899	0.5619	40	
	30	0.4924	0.5658	30	
	40	0.4950	0.5696	20	
	50	0.4975	0.5735	10	
	60	0.5000	0.5774	0	60
30	0	0.5000	0.5774	60	
	10	0.5025	0.5812	50	
	20	0.5050	0.5851	40	
	30	0.5075	0.5890	30	
	40	0.5100	0.5930	20	
	50	0.5125	0.5969	10	
	60	0.5150	0.6009	0	59
31	0	0.5150	0.6009	60	
	10	0.5175	0.6048	50	
	20	0.5200	0.6088	40	
	30	0.5225	0.6128	30	
	40	0.5250	0.6168	20	
	50	0.5275	0.6208	10	
	60	0.5299	0.6249	0	58
32	0	0.5299	0.6249	60	
	10	0.5324	0.6289	50	
	20	0.5348	0.6330	40	
	30	0.5373	0.6371	30	
	40	0.5398	0.6412	20	
	50	0.5422	0.6453	10	
	60	0.5446	0.6494	0	57
33	0	0.5446	0.6494	60	
	10	0.5471	0.6536	50	
	20	0.5497	0.6577	40	
	30	0.5519	0.6619	30	
	40	0.5544	0.6661	20	
	50	0.5568	0.6703	10	
	60	0.5592	0.6745	0	56
		Cosin.	Cotang	M.	G.

G.	M.	Sinus	Tang.		
34	0	0.5592	0.6745	60	
	10	0.5616	0.6787	50	
	20	0.5640	0.6830	40	
	30	0.5664	0.6873	30	
	40	0.5688	0.6916	20	
	50	0.5712	0.6959	10	
	60	0.5736	0.7002	0	55
35	0	0.5736	0.7002	60	
	10	0.5760	0.7046	50	
	20	0.5783	0.7089	40	
	30	0.5807	0.7133	30	
	40	0.5831	0.7177	20	
	50	0.5854	0.7221	10	
	60	0.5878	0.7265	0	54
36	0	0.5878	0.7265	60	
	10	0.5901	0.7310	50	
	20	0.5925	0.7355	40	
	30	0.5948	0.7400	30	
	40	0.5972	0.7445	20	
	50	0.5995	0.7490	10	
	60	0.6018	0.7536	0	53
37	0	0.6018	0.7536	60	
	10	0.6041	0.7581	50	
	20	0.6065	0.7627	40	
	30	0.6088	0.7673	30	
	40	0.6111	0.7720	20	
	50	0.6134	0.7766	10	
	60	0.6157	0.7813	0	52
38	0	0.6157	0.7813	60	
	10	0.6180	0.7860	50	
	20	0.6202	0.7907	40	
	30	0.6225	0.7954	30	
	40	0.6248	0.8002	20	
	50	0.6271	0.8050	10	
	60	0.6293	0.8098	0	51
39	0	0.6293	0.8098	60	
	10	0.6316	0.8146	50	
	20	0.6338	0.8195	40	
	30	0.6361	0.8243	30	
	40	0.6383	0.8292	20	
	50	0.6406	0.8342	10	
	60	0.6428	0.8391	0	50
40	0	0.6428	0.8391	60	
	10	0.6450	0.8441	50	
	20	0.6472	0.8491	40	
	30	0.6494	0.8541	30	
	40	0.6517	0.8591	20	
	50	0.6539	0.8642	10	
	60	0.6561	0.8693	0	49
41	0	0.6561	0.8693	60	
	10	0.6583	0.8744	50	
	20	0.6604	0.8796	40	
	30	0.6626	0.8847	30	
	40	0.6648	0.8899	20	
	50	0.6670	0.8952	10	
	60	0.6691	0.9004	0	48
		Cosin.	Cotang	M.	G.

G.	M.	Sinus	Tang.		
42	0	0.6691	0.9004	60	
	10	0.6713	0.9057	50	
	20	0.6734	0.9110	40	
	30	0.6756	0.9163	30	
	40	0.6777	0.9217	20	
	50	0.6799	0.9271	10	
	60	0.6820	0.9325	0	47
43	0	0.6820	0.9325	60	
	10	0.6841	0.9380	50	
	20	0.6862	0.9435	40	
	30	0.6884	0.9490	30	
	40	0.6905	0.9545	20	
	50	0.6926	0.9601	10	
	60	0.6947	0.9657	0	46
44	0	0.6947	0.9657	60	
	10	0.6967	0.9713	50	
	20	0.6988	0.9770	40	
	30	0.7009	0.9827	30	
	40	0.7030	0.9884	20	
	50	0.7050	0.9942	10	
	60	0.7071	1.0000	0	45
45	0	0.7071	1.0000	60	
	10	0.7092	1.0058	50	
	20	0.7112	1.0117	40	
	30	0.7133	1.0176	30	
	40	0.7153	1.0235	20	
	50	0.7173	1.0295	10	
	60	0.7193	1.0355	0	44
46	0	0.7193	1.0355	60	
	10	0.7214	1.0416	50	
	20	0.7234	1.0477	40	
	30	0.7254	1.0538	30	
	40	0.7274	1.0599	20	
	50	0.7294	1.0661	10	
	60	0.7314	1.0724	0	43
47	0	0.7314	1.0724	60	
	10	0.7333	1.0786	50	
	20	0.7353	1.0850	40	
	30	0.7373	1.0913	30	
	40	0.7392	1.0977	20	
	50	0.7412	1.1041	10	
	60	0.7431	1.1106	0	42
48	0	0.7431	1.1106	60	
	10	0.7451	1.1171	50	
	20	0.7470	1.1237	40	
	30	0.7490	1.1303	30	
	40	0.7509	1.1369	20	
	50	0.7528	1.1436	10	
	60	0.7547	1.1504	0	41
49	0	0.7547	1.1504	60	
	10	0.7566	1.1571	50	
	20	0.7585	1.1640	40	
	30	0.7604	1.1708	30	
	40	0.7623	1.1778	20	
	50	0.7642	1.1847	10	
	60	0.7660	1.1918	0	40
		Cosin.	Cotang	M.	G.

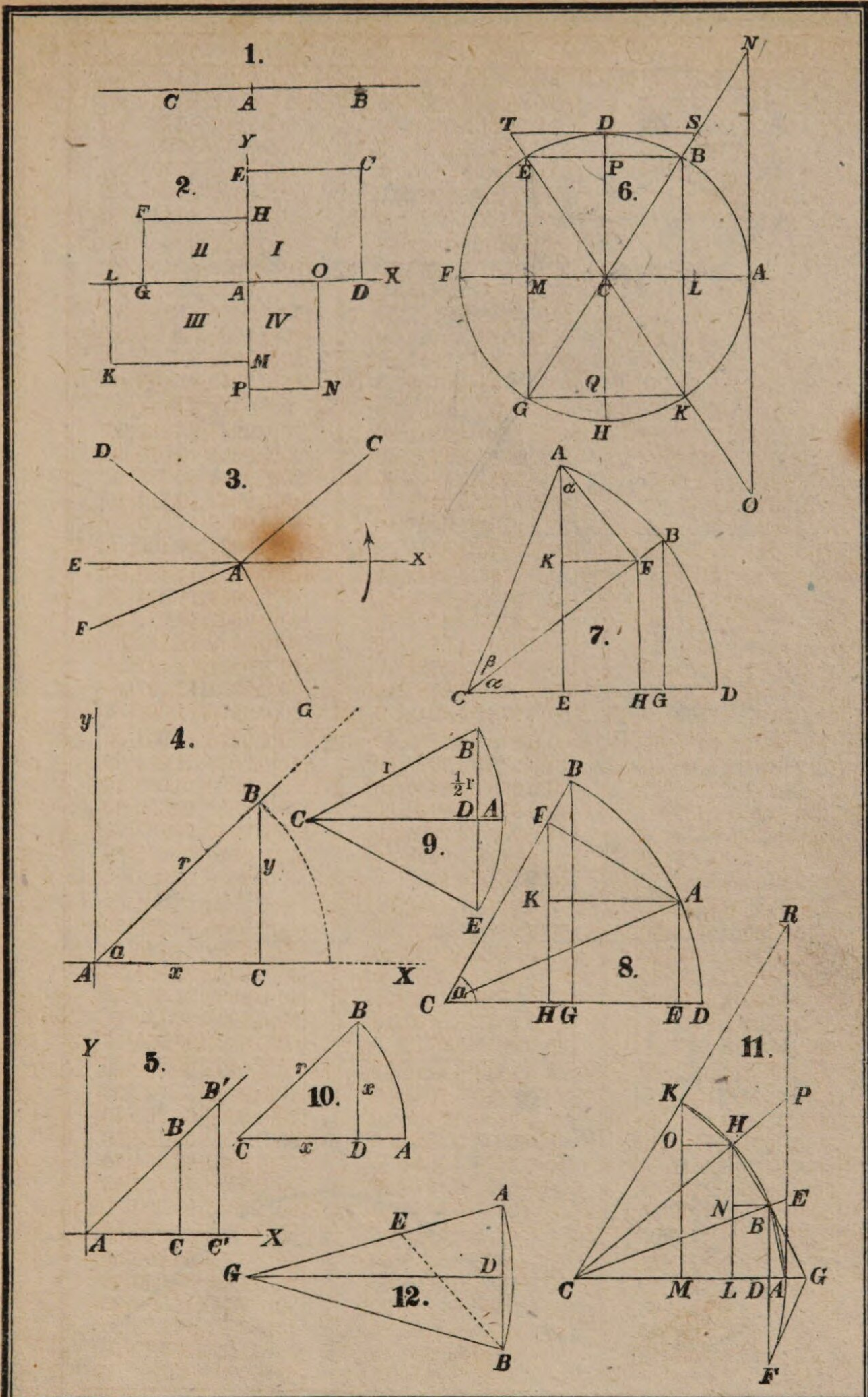
G.	M.	Sinus	Tang.		
50	0	0.7660	1.1918	60	
	10	0.7679	1.1988	50	
	20	0.7698	1.2059	40	
	30	0.7716	1.2131	30	
	40	0.7735	1.2203	20	
	50	0.7753	1.2276	10	
	60	0.7771	1.2349	0	39
51	0	0.7771	1.2349	60	
	10	0.7790	1.2423	50	
	20	0.7808	1.2497	40	
	30	0.7826	1.2572	30	
	40	0.7844	1.2647	20	
	50	0.7862	1.2723	10	
	60	0.7880	1.2799	0	38
52	0	0.7880	1.2799	60	
	10	0.7898	1.2876	50	
	20	0.7916	1.2954	40	
	30	0.7934	1.3032	30	
	40	0.7951	1.3111	20	
	50	0.7969	1.3190	10	
	60	0.7986	1.3270	0	37
53	0	0.7986	1.3270	60	
	10	0.8004	1.3351	50	
	20	0.8021	1.3432	40	
	30	0.8039	1.3514	30	
	40	0.8056	1.3597	20	
	50	0.8073	1.3680	10	
	60	0.8090	1.3764	0	36
54	0	0.8090	1.3764	60	
	10	0.8107	1.3848	50	
	20	0.8124	1.3934	40	
	30	0.8141	1.4019	30	
	40	0.8158	1.4106	20	
	50	0.8175	1.4193	10	
	60	0.8192	1.4281	0	35
55	0	0.8192	1.4281	60	
	10	0.8208	1.4370	50	
	20	0.8225	1.4460	40	
	30	0.8241	1.4550	30	
	40	0.8258	1.4641	20	
	50	0.8274	1.4733	10	
	60	0.8290	1.4826	0	34
56	0	0.8290	1.4826	60	
	10	0.8307	1.4919	50	
	20	0.8323	1.5013	40	
	30	0.8339	1.5108	30	
	40	0.8355	1.5204	20	
	50	0.8371	1.5301	10	
	60	0.8387	1.5399	0	33
57	0	0.8387	1.5399	60	
	10	0.8403	1.5497	50	
	20	0.8418	1.5597	40	
	30	0.8434	1.5697	30	
	40	0 8450	1.5798	20	
	50	0.8465	1.5900	10	
	60	0.8480	1.6003	0	32
		Cosin.	Cotang	M.	G.

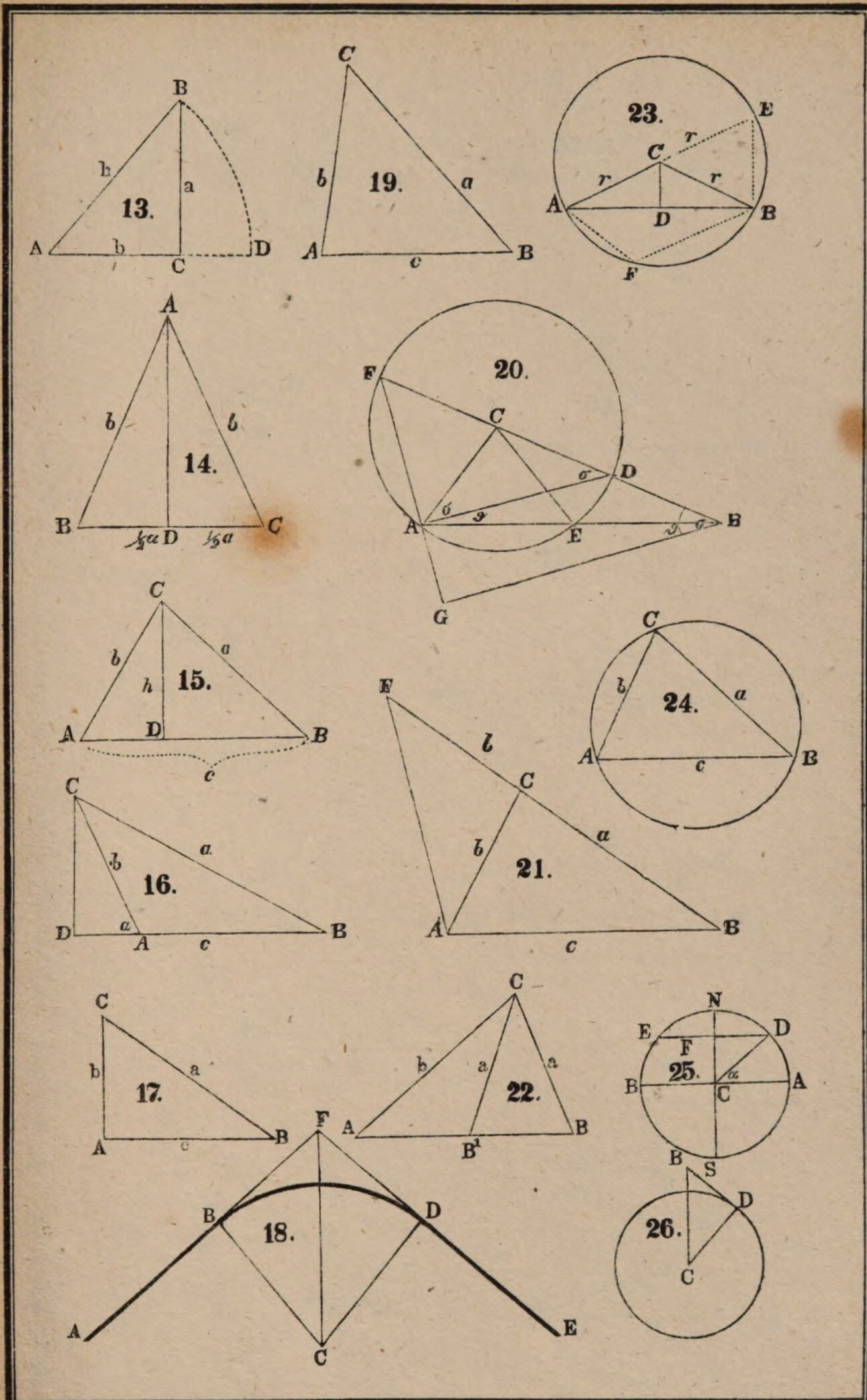
G.	M.	Sinus	Tang.		
58	0	0.8480	1.6003	60	
	10	0.8496	1.6107	50	
	20	0.8511	1.6212	40	
	30	0.8526	1.6319	30	
	40	0.8542	1.6426	20	
	50	0.8557	1.6534	10	
	60	0.8572	1.6643	0	31
59	0	0.8572	1.6643	60	
	10	0.8587	1.6753	50	
	20	0.8601	1.6864	40	
	30	0.8616	1.6977	30	
	40	0.8631	1.7090	20	
	50	0.8646	1.7205	10	
	60	0.8660	1.7321	0	30
60	0	0.8660	1.7321	60	
	10	0.8675	1.7437	50	
	20	0.8689	1.7556	40	
	30	0.8704	1.7675	30	
	40	0.8718	1.7796	20	
	50	0.8732	1.7917	10	
	60	0.8746	1.8040	0	29
61	0	0.8746	1.8040	60	
	10	0.8760	1.8165	50	
	20	0.8774	1.8291	40	
	30	0.8788	1.8418	30	
	40	0.8802	1.8546	20	
	50	0.8816	1.8676	10	
	60	0.8829	1.8807	0	28
62	0	0.8829	1.8807	60	
	10	0.8843	1.8940	50	
	20	0.8857	1.9074	40	
	30	0.8870	1.9210	30	
	40	0.8884	1.9347	20	
	50	0.8897	1.9486	10	
	60	0.8910	1.9626	0	27
63	0	0.8910	1.9626	60	
	10	0.8923	1.9768	50	
	20	0.8936	1.9912	40	
	30	0.8949	2.0057	30	
	40	0.8962	2.0204	20	
	50	0.8975	2.0353	10	
	60	0.8988	2.0503	0	26
64	0	0.8988	2.0503	60	
	10	0.9001	2.0655	50	
	20	0.9013	2.0809	40	
	30	0.9026	2.0965	30	
	40	0.9038	2.1123	20	
	50	0.9051	2.1283	10	
	60	0.9063	2.1445	0	25
65	0	0.9063	2.1445	60	
	10	0.9075	2.1609	50	
	20	0.9088	2.1775	40	
	30	0.9100	2.1943	30	
	40	0.9112	2.2113	20	
	50	0.9124	2.2286	10	
	60	0.9135	2.2460	0	24
		Cosin.	Cotang	M.	G.

G.	M.	Sinus	Tang.		
66	0	0.9135	2.2460	60	
	10	0.9147	2.2637	50	
	20	0.9159	2.2817	40	
	30	0.9171	2.2998	30	
	40	0.9182	2.3183	20	
	50	0.9194	2.3369	10	
	60	0.9205	2.3559	0	23
67	0	0.9205	2.3559	60	
	10	0.9216	2.3750	50	
	20	0.9228	2.3945	40	
	30	0.9239	2.4142	30	
	40	0.9250	2.4342	20	
	50	0.9261	2.4545	10	
	60	0.9272	2.4751	0	22
68	0	0.9272	2.4751	60	
	10	0.9283	2.4960	50	
	20	0.9293	2.5172	40	
	30	0.9304	2.5386	30	
	40	0.9315	2.5605	20	
	50	0.9325	2.5826	10	
	60	0.9336	2.6051	0	21
69	0	0.9336	2.6051	60	
	10	0.9346	2.6279	50	
	20	0.9356	2.6511	40	
	30	0.9367	2.6746	30	
	40	0.9377	2.6985	20	
	50	0.9387	2.7228	10	
	60	0.9397	2.7475	0	20
70	0	0.9397	2.7475	60	
	10	0.9407	2.7725	50	
	20	0.9417	2.7980	40	
	30	0.9426	2.8239	30	
	40	0.9436	2.8502	20	
	50	0.9446	2.8770	10	
	60	0.9455	2.9042	0	19
71	0	0.9455	2.9042	60	
	10	0.9465	2.9319	50	
	20	0.9474	2.9600	40	
	30	0.9483	2.9887	30	
	40	0.9492	3.0178	20	
	50	0.9502	3.0475	10	
	60	0.9511	3.0777	0	18
72	0	0.9511	3.0777	60	
	10	0.9520	3.1084	50	
	20	0.9528	3.1397	40	
	30	0.9537	3.1716	30	
	40	0.9546	3.2041	20	
	50	0.9555	3.2371	10	
	60	0.9563	3.2709	0	17
73	0	0.9563	3.2709	60	
	10	0.9572	3.3052	50	
	20	0.9580	3.3402	40	
	30	0.9588	3.3759	30	
	40	0.9596	3.4124	20	
	50	0.9605	3.4495	10	
	60	0.9613	3.4874	0	16
		Cosin.	Cotang	M.	G.

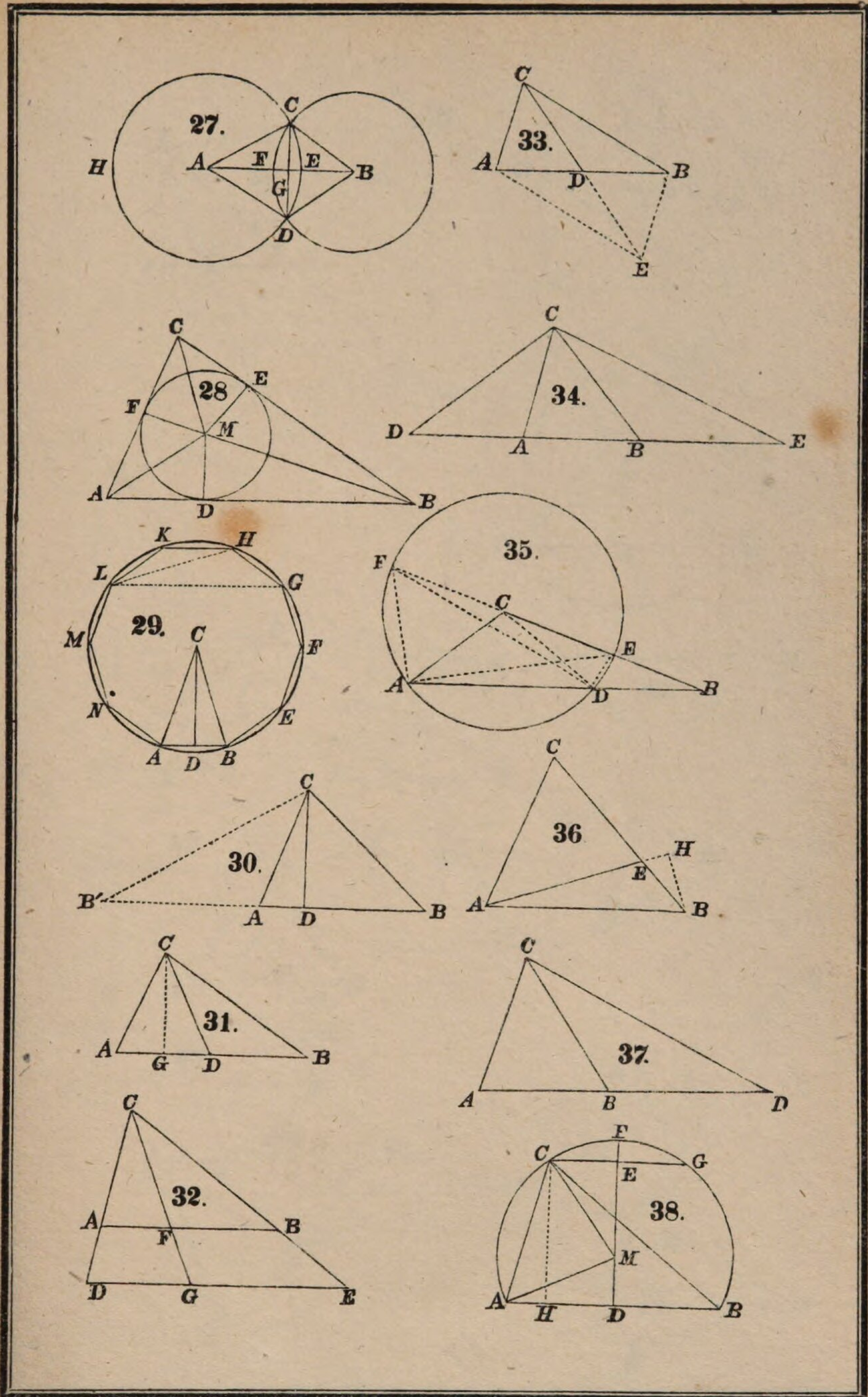
G.	M.	Sinus	Tang.		
74	0	0.9613	3.4874	60	
	10	0.9621	3.5261	50	
	20	0.9628	3.5656	40	
	30	0.9636	3.6059	30	
	40	0.9644	3.6470	20	
	50	0.9652	3.6891	10	
	60	0.9659	3.7321	0	15
75	0	0.9659	3.7321	60	
	10	0.9667	3.7760	50	
	20	0.9674	3.8208	40	
	30	0.9681	3.8667	30	
	40	0.9689	3.9136	20	
	50	0.9696	3.9617	10	
	60	0 9703	4.0108	0	14
76	0	0.9703	4.0108	60	
	10	0.9710	4.0611	50	
	20	0.9717	4 1126	40	
	30	0.9724	4.1653	30	
	40	0.9730	4.2193	20	
	50	0.9737	4.2747	10	
	60	0.9744	4.3315	0	13
77	0	0.9744	4.3315	60	
	10	0.9750	4.3897	50	
	20	0.9757	4.4494	40	
	30	0.9763	4.5107	30	
	40	0.9769	4.5736	20	
	50	0.9775	4.6382	10	
	60	0.9781	4.7046	0	12
78	0	0.9781	4.7046	60	
	10	0.9787	4.7729	50	
	20	0.9793	4.8430	40	
	30	0.9799	4.9152	30	
	40	0.9805	4.9894	20	
	50	0.9811	5.0658	10	
	60	0.9816	5.1446	0	11
79	0	0.9816	5.1446	60	
	10	0.9822	5.2257	50	
	20	0.9827	5.3093	40	
	30	0.9833	5.3955	30	
	40	0.9838	5.4845	20	
	50	0.9843	5.5764	10	
	60	0.9848	5.6713	0	10
80	0	0.9848	5.6713	60	
	10	0.9853	5.7694	50	
	20	0.9858	5.8708	40	
	30	0.9863	5.9758	30	
	40	0.9868	6.0844	20	
	50	0.9872	6.1970	10	
	60	0.9877	6.3138	0	9
81	0	0.9877	6.3138	60	
	10	0.9881	6.4348	50	
	20	0.9886	6.5606	40	
	30	0.9890	6.6912	30	
	40	0.9894	6.8269	20	
	50	0.9899	6.9682	10	
	60	0.9903	7.1154	0	8
		Cosin.	Cotang	M.	G.

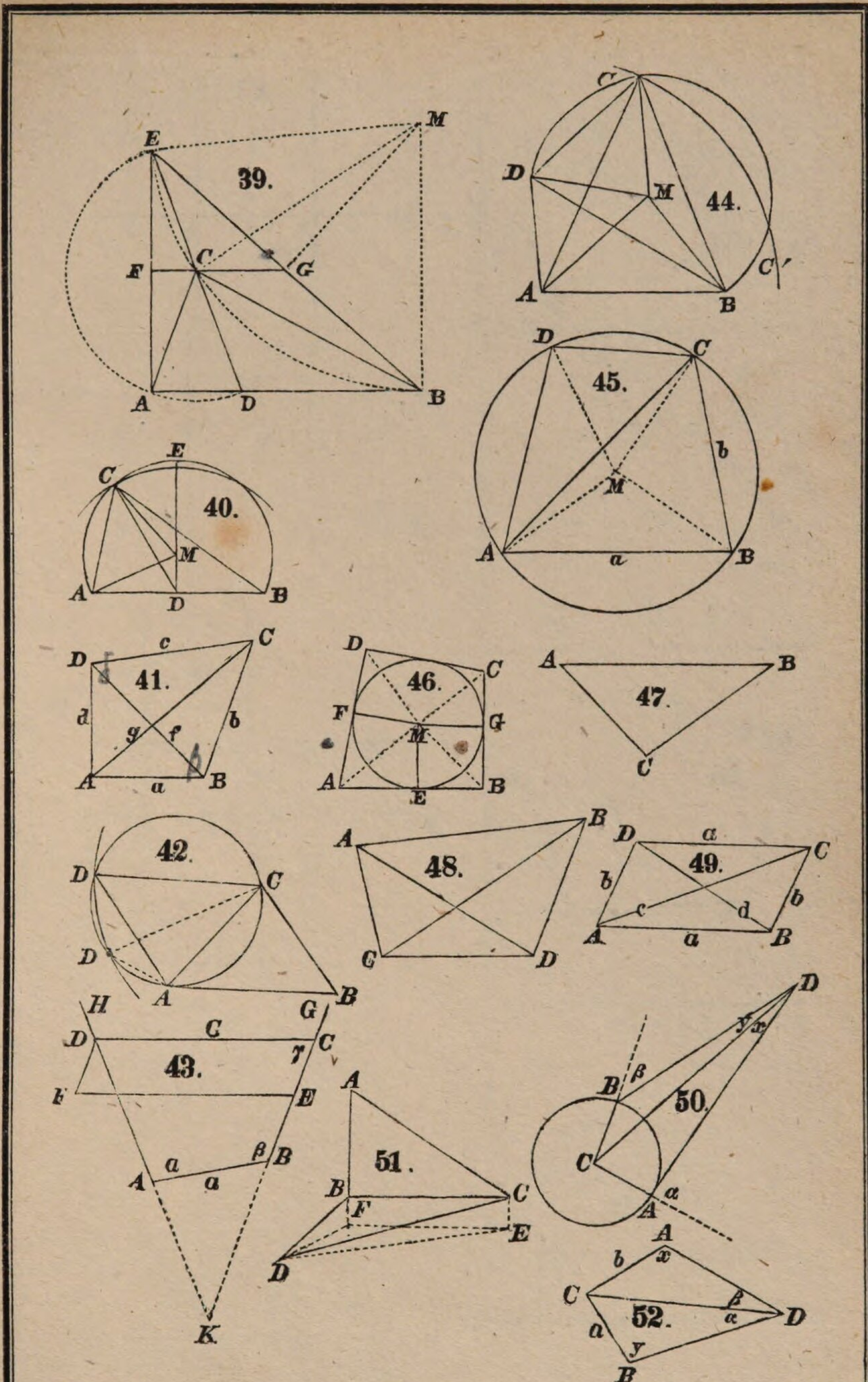
G.	M.	Sinus	Tang.		
82	0	0.9903	7.1154	60	
	10	0.9907	7.2687	50	
	20	0.9911	7.4287	40	
	30	0.9914	7.5958	30	
	40	0.9918	7.7704	20	
	50	0.9922	7.9530	10	
	60	0.9925	8.1443	0	7
83	0	0.9925	8.1443	60	
	10	0.9929	8.3450	50	
	20	0.9932	8.5555	40	
	30	0.9936	8.7769	30	
	40	0.9939	9.0098	20	
	50	0.9942	9.2553	10	
	60	0.9945	9.5144	0	6
84	0	0.9945	9.5144	60	
	10	0.9948	9.7882	50	
	20	0.9951	10.078	40	
	30	0.9954	10.385	30	
	40	0.9957	10.712	20	
	50	0.9959	11.059	10	
	60	0.9962	11.430	0	5
85	0	0.9962	11.430	60	
	10	0.9964	11.826	50	
	20	0.9967	12.251	40	
	30	0.9969	12.706	30	
	40	0.9971	13.197	20	
	50	0.9974	13.727	10	
	60	0.9976	14.301	0	4
86	0	0.9976	14.301	60	
	10	0.9978	14.924	50	
	20	0.9980	15.605	40	
	30	0.9981	16.350	30	
	40	0.9983	17.169	20	
	50	0.9985	18.075	10	
	60	0.9986	19.081	0	3
87	0	0.9986	19.081	60	
	10	0.9988	20.206	50	
	20	0.9989	21.470	40	
	30	0.9990	22.904	30	
	40	0.9992	24.542	20	
	50	0.9993	26.432	10	
	60	0.9994	28.636	0	2
88	0	0.9994	28.636	60	
	10	0.9995	31.242	50	
	20	0.9996	34.368	40	
	30	0.9997	38.188	30	
	40	0.9997	42.964	20	
	50	0.9998	49.104	10	
	60	.99985	57.290	0	1
89	0	.99985	57.290	60	
	10	.99989	68.750	50	
	20	.99993	85.940	40	
	30	.99996	114.59	30	
	40	.99998	171.89	20	
	50	.99996	343.77	10	
	60	1.0000	infin.	0	0
		Cosin.	Cotang	M.	G.

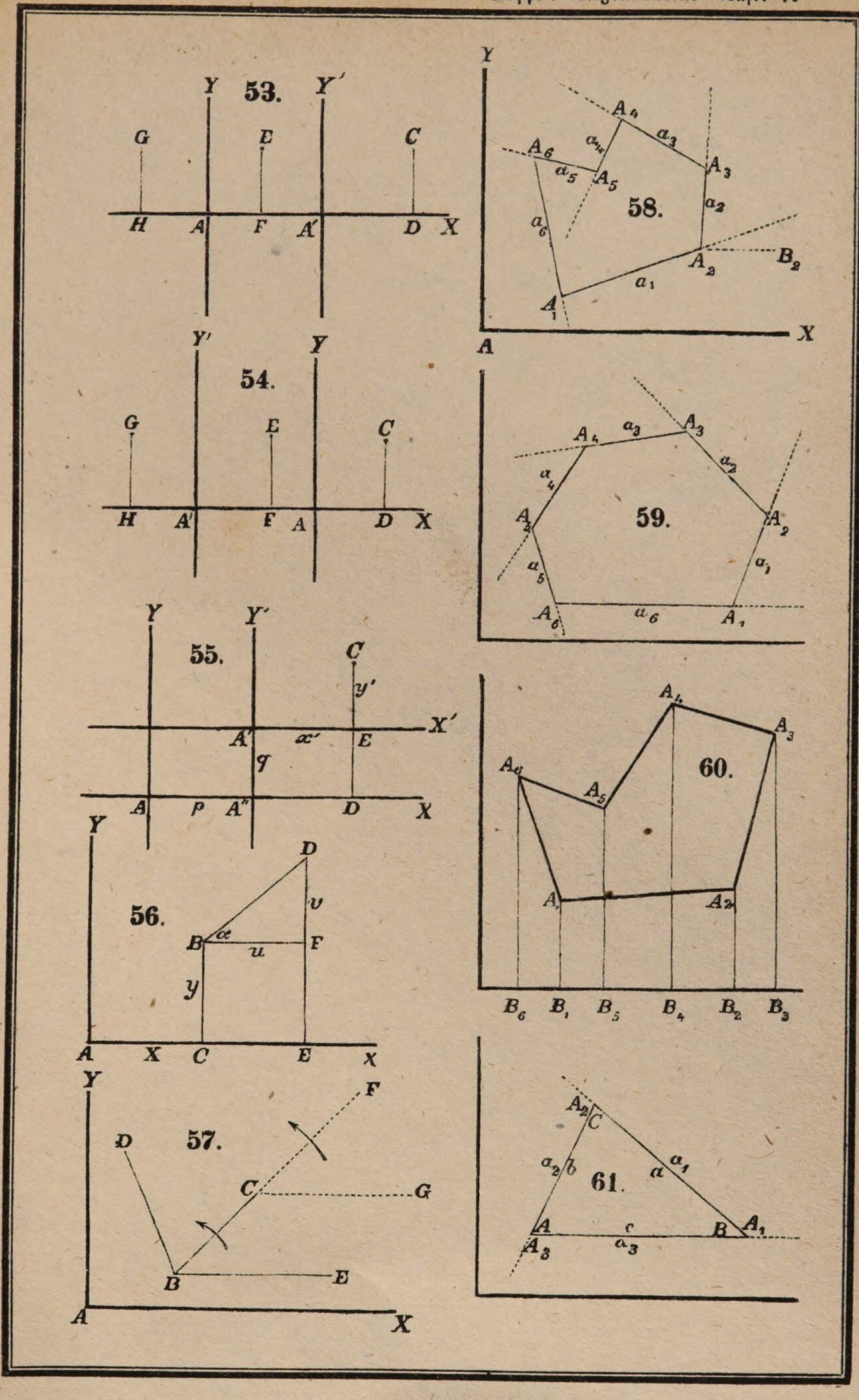

1.
C A B
2.
Y E C F H II I L G A O D X III IV K M P N
3.
D C E A X F G
4.
y B r y A a x C X
5.
Y B' B A C C' X
6.
N T D S E P B 6. F M C L A Q G K H O
7.
A α K F B 7. β α C E H G D
8.
B F K A 8. C a H G E D
9.
r B ½r C D A 9. E
10.
B r 10. x C x D A
11.
R 11. K P H O N E B C M L D A G F
12.
A E D G 12. B



13.
A
B
C
D
a
b
h
14.
A
B
C
D
b
b
½a
½a
15.
A
B
C
D
a
b
c
h
16.
A
B
C
D
a
b
c
α
17.
A
B
C
a
b
c
18.
A
B
C
D
E
F
19.
A
B
C
a
b
c
20.
A
B
C
D
E
F
G
21.
A
B
C
F
a
b
c
l
22.
A
B
C
B¹
a
a
b
23.
A
B
C
D
E
F
r
r
r
24.
A
B
C
a
b
c
25.
N
S
E
D
F
B
A
C
α
26.
B
S
D
C


27. H A F E B C G D
33. C A D B E
28. C E F M A D B
34. C D A B E
29. K H L G M C F N E A D B
35. F C E A D B
30. C B' A D B
36. C H E A B
31. C A G D B
37. C A B D
32. C A B F D G E
38. F C G E M A H D B


39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.


53.
Y
Y'
G
E
C
H
A
F
A'
D
X
54.
Y'
Y
G
E
C
H
A'
F
A
D
X
55.
Y
Y'
C
y'
X'
A'
x'
E
q
A
p
A''
D
X
56.
Y
D
v
B
α
u
F
y
A
X
C
E
X
57.
Y
F
D
C
G
B
E
A
X
58.
Y
A₄
a₃
a₄
A₆
a₅
A₅
A₃
a₂
a₆
A₂
B₂
a₁
A₁
A
X
59.
A₄
a₃
A₃
a₄
a₂
A₅
A₂
a₁
a₅
A₆
a₆
A₁
60.
A₄
A₃
A₆
A₅
A₁
A₂
B₆
B₁
B₅
B₄
B₂
B₃
61.
A₂
C
a₂
b
a
a₁
A
c
B
A₁
A₃
a₃

Koppe, Karl Friedrich August,

Die ebene Trigonometrie für den Schul- und Selbst-Unterricht bearbeitet
Mit 5 Figurentafeln

Essen 1871